Aqua-LAC - Vol. 3 - Nº 1 - Mar. 2011. pp. 9 - 17.

ADAPTACIÓN DEL MÉTODO MULTIESCALA PARA LA SIMULACIÓN DE ACUÍFEROS

ADAPTATION OF MULTISCALE METHOD FOR THE AQUIFERS SIMULATION

Gallardo, Pablo[1]; Becerra, Leticia[2]; Pérez, Ángel[3] y Castellanos, Longina[4]

Resumen

Un modelo de flujo de agua subterránea es una herramienta de apoyo para administrar y explotar racionalmente un acuífero, permite predecir los niveles de agua que se obtendrían usando diferentes políticas de explotación, antes de que éstas se implementen. Desde la década de los 70's, los modelos de simulación numérica y matemáticos se han venido empleando para el estudio del agua subterránea (Yeh, 1986). En general, estos modelos son resueltos mediante aproximaciones en diferencias finitas o elementos finitos. El gran desarrollo que han tenido las computadoras ha permitido utilizar algoritmos complejos. Es por eso que en la actualidad tenemos la posibilidad de utilizar mallas con una discretización muy refinada, generando un enorme sistema de ecuaciones que se puede resolver mediante los métodos iterativos. Como resultado se tiene una solución mucho más exacta.

La estimación de parámetros en aguas subterráneas a través de los métodos inversos es en términos matemáticos, un problema mal planteado dado que su solución no es única. Allison (1979) menciona que la no-unicidad e inestabilidad son comúnmente una propiedad interna invariable de los problemas inversos. La inestabilidad de la solución inversa proviene del hecho que en errores pequeños en las cargas hidráulicas puede causar serios errores en los parámetros estimados (Yeh, 1986). Hay que usar entonces una estrategia de regularización.

El Método de Regularización Multiescala (MS) ha mostrado en la práctica su efectividad y constituye una alternativa al Método de Regularización de Tíjonov (TJ), que depende de un parámetro de regularización difícil de encontrar. Ambos métodos de regularización se incorporaron al código fuente del simulador de acuíferos denominado MODFLOW–2000 que ha demostrado ser eficiente y de amplio uso en esta área.

En este trabajo se muestran también algunos resultados obtenidos por los autores en la temática de estimación de parámetros usando ejemplos académicos sintéticos. Los métodos que se discuten en este artículo están a la vanguardia y los resultados han sido alentadores.

Palabras claves: MODFLOW–2000, Modelación, Regularización, Multiescala, Optimización.

Abstract

A model of groundwater flow is a support tool to manage and exploit rationally an aquifer. It can predict the water levels that would be obtained using different policy consideration of exploitation, before these are implemented. Since the early 70's, numerical simulation and mathematical models have been frequently used to study groundwater (Yeh, 1986). In general, these models are solved by finite difference approximations or finite elements. Besides, the great developments of computers have allowed using complex algorithms. That's why we now have the ability to use large discrete meshes generating a huge system of equations that can be solved by iterative methods. The result is a more accurate solution.

Parameter estimation in groundwater through inverse methods in mathematical terms is an ill-posed problem because its solution is not unique. Allison (1979) mentioned that the non-uniqueness and instability are often an invariable internal property of inverse problems. The instability of the inverse solution comes from the fact that small errors in the hydraulic heads can cause serious errors in the estimated parameters (Yeh, 1986). We must then use a strategy of regularization.

Multiscale Regularization Method (MS) has shown its effectiveness in practice and provides an alternative to Tikhonov Regularization Method (TJ), which depends on a regularization parameter difficult to find. Both regularization methods were incorporated in the source code of the aquifer simulator called MODFLOW–2000, which has proven to be efficient and widely used in this area.

This paper also shows some results obtained by the authors on the subject of parameter estimation using synthetic academic examples. The methods discussed in this article are on cutting–edge research and the results have been encouraging.

Keywords: MODFLOW–2000, Modeling, Regularization, Multiscale, Optimization.

1 Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, gallardo@tlaloc.imta.mx

2 Consultor independiente, lety.becerra@gmail.com

3 Consultor independiente, aperezdom@gmail.com

4 Northwood University, West Palm Beach, USA, longinac@gmail.com

Artículo enviado el 3 de diciembre de 2010

Artículo aceptado el 28 de marzo de 2011

INTRODUCCIÓN

Los métodos inversos son una metodología, mediante la cual se estiman los parámetros partiendo de un grupo inicial de valores, basados en minimizar una función objetivo y en actualizar el nuevo grupo de parámetros a partir del análisis de sensibilidad (Poeter,1998). Los problemas inversos surgen con más ímpetu debido a su importancia científica, económica, social y política. El conocimiento de los métodos de solución de los problemas inversos, ha demostrado su capacidad al permitirle al modelador reducir a un mínimo las discrepancias entre los números generados por el modelo pertinente y las mediciones correspondientes. En la modelación de un acuífero, cualquiera que sea su propósito, explotación o control de la contaminación, donde las matemáticas constituyen una herramienta fundamental para la construcción de modelos, es de gran utilidad economizar tanto en tiempo como en costos en la obtención de los parámetros físicos del acuífero; sin menoscabar la importancia de obtener parámetros in situ.

El objetivo del presente trabajo es adaptar el Método de Optimización Multiescala al código numérico de modelación de flujo subterránea MODFLOW (USGS, 2000). Posteriormente realizar una implementación computacional para la estimación de parámetros. Para esto se realizaron dos alternativas o escenarios, el primero es un ejemplo sintético de la Subcuenca Aeropuerto del acuífero Ariguanabo, Cuba y el segundo es una aplicación al acuífero del Valle de Querétaro, Querétaro, México.

Tradicionalmente en los modelos de flujo se utiliza el método de prueba y error para llevar a cabo la calibración del modelo. Sin embargo mediante las técnicas inversas es necesario contar con mediciones de la carga hidráulica en diferentes puntos (pozos de observación o explotación), que es un proceso más económico que el de conocer los parámetros hidráulicos a través de las pruebas de bombeo que resultan ser muy costosas, pero necesarias, las cuales nos proporcionan mediciones puntuales.

METODOLOGÍA

En este trabajo se adaptó el método de Multiescala al código numérico MODFLOW–2000 para la estimación de parámetros en acuíferos que eliminen el mal planteamiento que, por naturaleza, presentan los problemas inversos.

Recordemos que el problema a resolver es, encontrar los parámetros χ que caracterizan al medio poroso, tal que:

$$\min_{x} \| F(x) \| \qquad (1)$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{nobs} (h_i^c - h_i^{obs})^2 \qquad (2)$$

$nobs$	número de observaciones
h_i^{obs}	cargas observadas
h_i^c	cargas calculadas por el modelo

Inicialmente se creó una variante de MODFLOW–2000 en doble precisión, luego de lo cual se sustituyó el módulo de optimización del mismo (GAUSS–NEWTON) en su variante Levenberg Marquardt (USGS, 2000) por una implementación de Quasi–Newton de (Nocedal J. y Wright, 1999). Esta sustitución se hizo manteniendo el cálculo del gradiente, y por ende, el cálculo de sensibilidades implementadas en MODFLOW–2000. Para esto fue necesario una intensa exploración de los diferentes módulos fuentes (Fortran90) de este software.

Este nuevo optimizador, aunque carece de las propiedades de regularización del método de Levenberg Marquardt (USGS, 2000) (que funciona sólo cuando se conoce un parámetro óptimo, cosa muy difícil en la práctica), es un optimizador con cotas, cosa importante en este tipo de problemas donde, por lo general, existe información sobre rangos aceptables para los parámetros a estimar y es, en esencia, una forma de regularización.

MODFLOW−2000 es un modelo tridimensional de aguas subterráneas en diferencias finitas que simula los flujos estacionarios y no estacionarios en configuraciones irregulares, en las cuales los acuíferos pueden ser confinados y no confinados.

Para el caso práctico la ecuación más general para flujo transitorio en tres dimensiones para un acuífero confinado en un medio heterogéneo y anisotrópico es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial h}{\partial z}\right) - Q = S_z\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3)$$

donde:

h	carga hidráulica, *(L)*;
K_x , K_y , K_z	componentes de la conductividad hidráulica en las direcciones *x*, *y* y *z* $(^L/_T)$;
T_x , T_y , T_z	componentes de la transmisividad hidráulica en las direcciones *x*, *y* y *z*, para acuíferos confinados $Kh = T(x, y, z)$, $(^L/_{T^2})$;
Q	fuente o sumidero local por unidad de volumen, $(^1/_T)$;
S_S	coeficiente de almacenamiento específico, (L^{-1});
x , y , z	coordenadas espaciales, *(L)*;
t	tiempo, *(T)*.

Suponiendo que conocemos las propiedades antes mencionadas, asociadas con los parámetros *K* y *S*, es posible entonces resolver el modelo de flujo con condiciones iniciales y de borde correspondientes al área de interés, y obtener como respuesta los niveles de agua o altura piezométrica *h*, que es la variable que nos reporta la cantidad de agua disponible en cierto momento.

El problema inverso se plantea de la siguiente manera: se conoce el efecto *(h)* y se busca la causa *(K y S)* que lo provoca, en otras palabras dada la carga hidráulica *(h)*, se trata de determinar un grupo óptimo de parámetros *(K y S)* que reproduzcan dichas observaciones.

Breve descripción del método de regularización "optimización multiescala"

El problema de estimación de parámetros en un acuífero es lo que se llama en matemáticas un problema mal planteado y, por tanto, necesita ser regularizado. El Método de Optimización Multiescala ha mostrado en la práctica ser una posible vía para la solución de este problema.

Se trata de una técnica de regularización cuya idea central consiste en construir una sucesión de aproximaciones discretas de *K* en subespacios de dimensión finita definidos a partir de discretizaciones cada vez más finas de la región del acuífero, iniciando con una discretización gruesa hasta llegar a una óptima para resolver el problema por el método de prueba y error. El número de discretizaciones juega en este caso el papel de parámetro regularizador (Pérez, A. y Castellanos, L., 1999).

Asumiremos para mayor facilidad en la explicación que estamos modelando un acuífero confinado, que el coeficiente *S* es conocido y que sólo tenemos que estimar *T*.

La malla es rectangular y los diferentes niveles de discretización son Δ_k, las sucesiones empleadas en Multiescala se muestran en la figura 1.

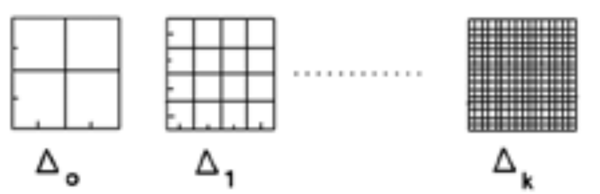

Figura 1. Proceso de optimización Multiescala.

Buscamos *T* en un subespacio de dimensión finita.

$$T_{\bar{\Delta}_o} = \arg\min \left\| L(T_{\Delta_o}) - h_{\Delta_o} \right\|^2 \qquad (4)$$

La idea principal es resolver en una malla "gruesa" Δ_o el problema de optimización discreta, después, se divide cada rectángulo y la optimización continúa por el siguiente algoritmo:

para $k = 0$, partiendo de $T^o\Delta_o$ encontrar $T^{-}\Delta_o$ para $k = 1$ hasta *ms* (nivel multiescala) se resuelve para obtener *T* parar (Δk) habiendo interpolado $T^{-}\Delta_{k-1}$ a los puntos de la malla Δ_k.

$$T_{\bar{\Delta}_o} = \arg\min \left\| L(T_{\Delta_k}) - h_{\Delta_k} \right\|^2 \qquad (5)$$

Descripción de las posibles diferentes implementaciones de "multiescala" sobre MODFLOW−2000

Existen diferentes formas de implementar "multiescala". En el presente trabajo usaremos la que hemos llamado "semiautomática" y consiste en lo siguiente:

Usando las facilidades que brinda el software ArgusONE (Argus, 1997) se pueden generar diferentes grupos de ficheros, un grupo para cada escala, y correr el estimador secuencialmente, es decir: se obtiene un grupo de parámetros óptimos en la escala cero y después tomar como punto inicial para las siguientes escalas los parámetros obtenidos en escalas anteriores previa una interpolación adecuada. En cada paso MODFLOW–2000 utilizaría los ficheros generados por ArgusONE para la escala correspondiente con excepción de los ficheros de los parámetros a estimar que se sustituye por los valores obtenidos anteriormente mediante interpolación. El programa que tiene esta implementación se denominó MFK_MS.

Debido a que usamos esquemas centrados en las celdas, las diferentes mallas multiescalas serán del tipo:

$$x_0^{ms} \times x_0^{ys} \qquad (6)$$

En futuros trabajos se desarrollará una implementación "automática" que definirá el número de escalas a usar, partiendo de una escala cero y posteriormente generar en forma exponencial las siguientes escalas. Las mallas generadas para cada una de las escalas serán creadas en ArgusONE. La última malla de la secuencia de escalas, es la denominada escala máxima.

Gradiente por diferencias sobre MODFLOW−2000

Debido a que el método de sensibilidades implementado en MODFLOW–2000 funciona sólo para el caso en que el problema esté bien determinado es decir, el número de observaciones *(ND)* sea mayor al número de parámetros a estimar *(NPE)*, se implementó otra forma para el cálculo del gradiente. Debido a la complejidad que tiene MODFLOW–2000 en el cálculo del valor de la función, se hizo necesario hacer cambios en la estructura del mismo e implementar un método más sencillo para el cálculo del gradiente. Por tal motivo se eligió el gradiente por diferencias que básicamente está dado por la fórmula:

$$\frac{F(x+\sigma)+F(x)}{\sigma} \qquad (7)$$

donde σ es la precisión de la máquina.

La figura 2 muestra los cambios introducidos en el diagrama general de MODFLOW–2000 para lograr nuestro objetivo.

Funcional de Tíjonov

Uno de los métodos más eficaces, al menos en teoría, para la regularización de problemas mal planteados como el que nos ocupa, es el Método de Regularización de Tíjonov, que a grandes rasgos, consiste en sustituir la resolución del problema inverso “mal planteado” por la resolución de una familia de problemas “*vecinos*” bien planteados, dependientes de un parámetro de regularización, en cada uno de los cuales se minimiza el funcional regularizante:

$$R^{\alpha}_{б}(z) = \|Az - u_{б}\|^{2} + \alpha S(z) \qquad (8)$$

El funcional que se usó en el programa MFK_MS es el siguiente:

$$S(z) = \|(z\|^{\uparrow} 2 \qquad (9)$$

donde (un operador diferencial.

En el programa se presenta la opción de usar o no regularización de Tíjonov y en caso positivo se pide el parámetro de Tíjonov. Es bueno destacar que el cálculo de este parámetro no es nada trivial y actualmente se dedica un gran número de trabajos a esto (Castellanos L., et al., 2002).

Tipos de funcionales

Como parte de los cambios realizados a MODFLOW–2000 está la incorporación de dos nuevas formas del cálculo del funcional que se requiere minimizar. Estos funcionales se definen de la siguiente forma:

Ftipo0 es el tipo de funcional que trae implementado MODFLOW–2000.

Ftipo1 es el funcional que usa para comparar el valor de la carga de la celda donde se encuentra la observación.

Ftipo2 es el funcional que usa para comparar el valor interpolado en ***ialfa*** celdas cercanas a la observación.

Un inconveniente que se revela inmediatamente al aplicar el método “multiescala” en su forma actual y sobre todo en las últimas escalas es que el número de observaciones *(ND)* puede ser menor que el número de parámetros que se desea estimar *(NPE)*. Esto nos lleva a decidir si resolver o no problemas sobredefinidos o subdefinidos, es decir, dejar va-

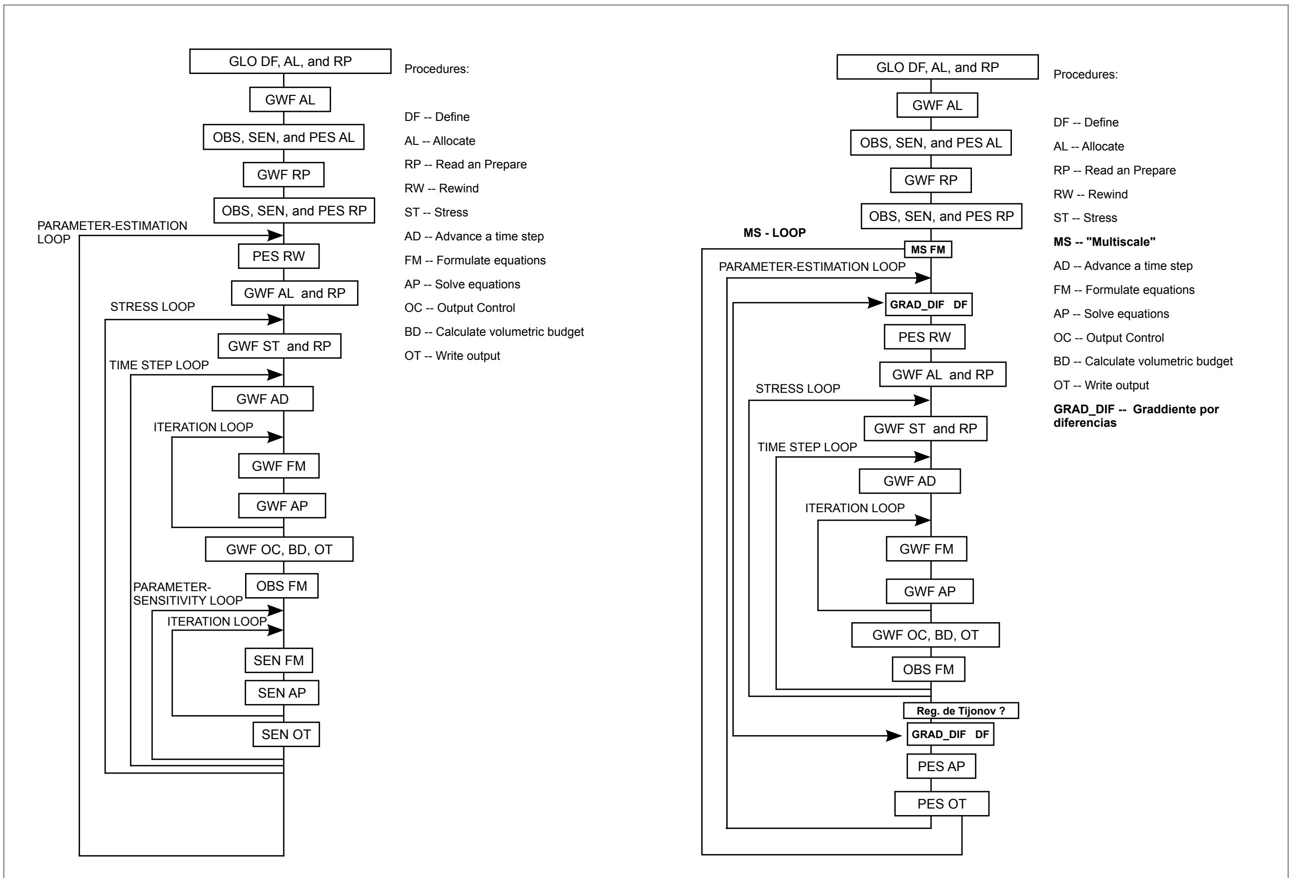

Figura 2. a) Diagrama de flujo general de MODFLOW-2000; b) Diagrama general de MFK_MS.

riables libres en el proceso de minimización y usar métodos que garanticen que se cumpla la condición *ND > NPE* al estilo de MODFLOW−2000 (Método de Levenberg Marquardt), cosa que puede ser alcanzada interpolando adecuadamente (método del kriging) las observaciones a un mayor número de celdas hasta que se cumpla la condición *(ND > NPE)* (Doherty J., 2003).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los problemas sintéticos que analizamos en este trabajo son la subcuenca Aeropuerto del acuífero Ariguanabo en La Habana, Cuba y el acuífero del Valle de Querétaro, México con una sola capa. Ambos problemas, aún cuando son sintéticos, mantienen muchas de las propiedades de los problemas reales. Esto se hizo así para cuando se pase al problema real tener una idea más exacta del mismo.

Acuífero Ariguanabo, subcuenca Aeropuerto

El área de estudio se localiza en la provincia La Habana Cuba, subcuenca Aeropuerto, con una superficie de 40 km^2. En la figura 3 se muestra la localización, mapa de transmisividades *(T=Kd)* y pozos de observación para la subcuenca Aeropuerto. En la zona norte se impusieron condiciones de contorno de Neumane $\left(T\frac{\partial h}{\partial n} = constante\ 1\ (t)\right)$ y en la zona suroeste condiciones de Dirichlet *(h = constante 2 (t))*, mostradas en la tabla 1. La malla usada para esta región en el programa ESTIM (Pérez A. y Gómez, S., 2001) fue de dimensión 16x16 (nodo centrado, Gómez, S., et al, 1998).

Tabla 1. Condiciones iniciales del acuífero Ariguanabo.

Tiempo	*Cte1(t)*	*Cte2 (t)*		
		P–80	P–85	P–91
T1	235	57.0	55.0	54.9
T2	1482	57.8	56.0	55.1
T3	1282	57.2	55.5	54.9
T4	1046	57.7	55.5	54.5

Nota: multiplicar la *Cte1(t)* por el área de la celda

En la figura 4 se muestran las diferentes mallas generados con ArgusONE para ser usada por MODFLOW–2000 (centrada en la celda) en el acuífero Ariguanabo.

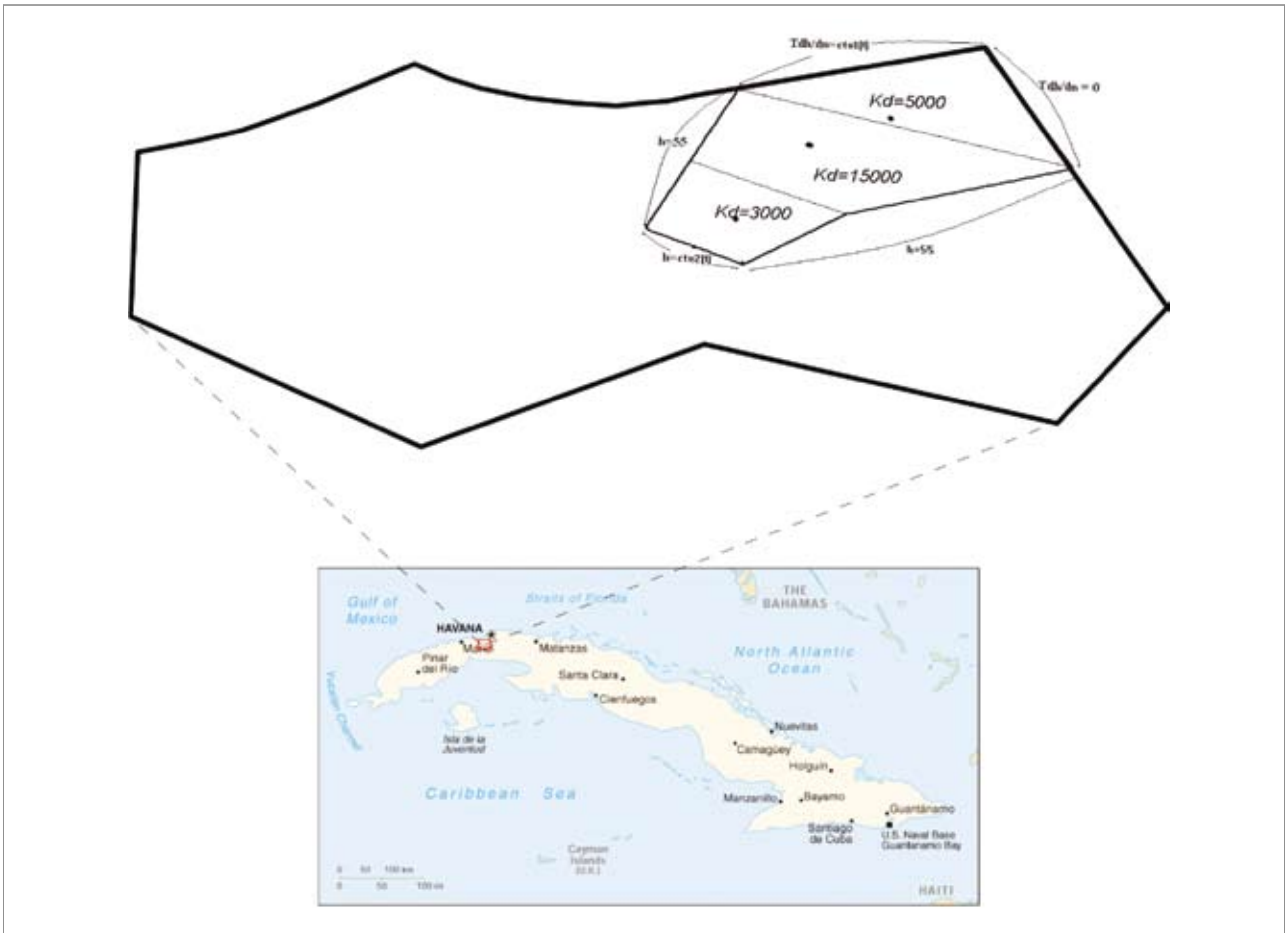

Figura 3. Modelo conceptual del acuífero Ariguanabo, subcuenca Aeropuerto.

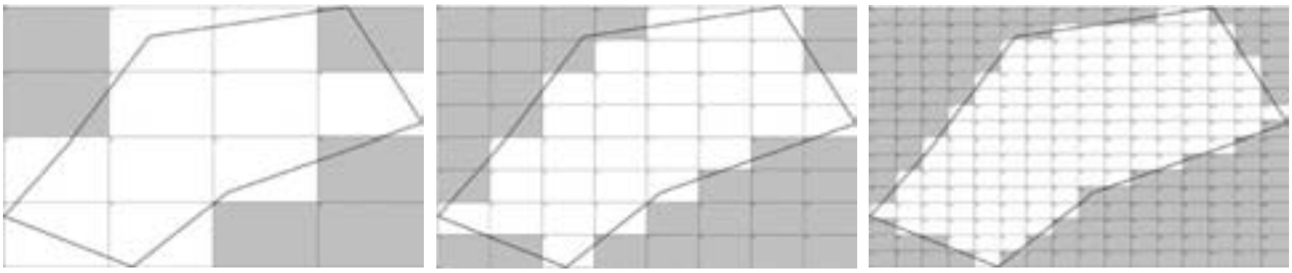

Figura 4. Multiescala de 4x4, 8x8 y 16x16 para el acuífero Aeropuerto.

Acuífero Valle de Querétaro

Para la experimentación numérica con el método multiescala se disminuyó la complejidad del modelo original del acuífero Valle de Querétaro (GUYSA, 1996): reduciendo el número de capas, de cinco a una. Para obtener los valores de la conductividad hidráulica en esta capa se consideró el promedio de las conductividades hidráulicas de los dos medios (poroso y fracturado). Se consideraron 406 pozos de extracción para calcular su volumen y 41 pozos de observación para obtener los niveles. Las fronteras en el modelo original fueron consideradas como condición de borde de carga general (GHB, por sus siglas en inglés), ubicadas de la siguiente manera: al Norte, los valles de Buenavista y Chichimequillas–Amascala; al Este, San Juan del Río–Pedro Escobedo; al Sur, el valle de Humilpan; estas tres fronteras son consideradas entradas de flujos laterales. Y al Oeste se localiza la única frontera considerada de salida, hacia el valle de Apaseo El Alto, Gto (Figura 5).

El ejemplo sintético para este acuífero se modeló como freático. La recarga representada en lámina diaria fue de 0.00023 m/día aplicada a cada una de las celdas activas del modelo y el rendimiento específico utilizado es de 0.1 (que corresponde a material detrítico sin consolidar de origen volcánico). Se consideraron tres periodos de stress con lapsos de cinco años cada uno (1981-1985, 1985-1990 y 1990-1995) para discretización del tiempo (GUYSA, 1996). En la figura 6 se muestran las diferentes mallas generadas con ArgusONE para ser usada por MODFLOW–2000 (nodo centrado) del acuífero Valle de Querétaro.

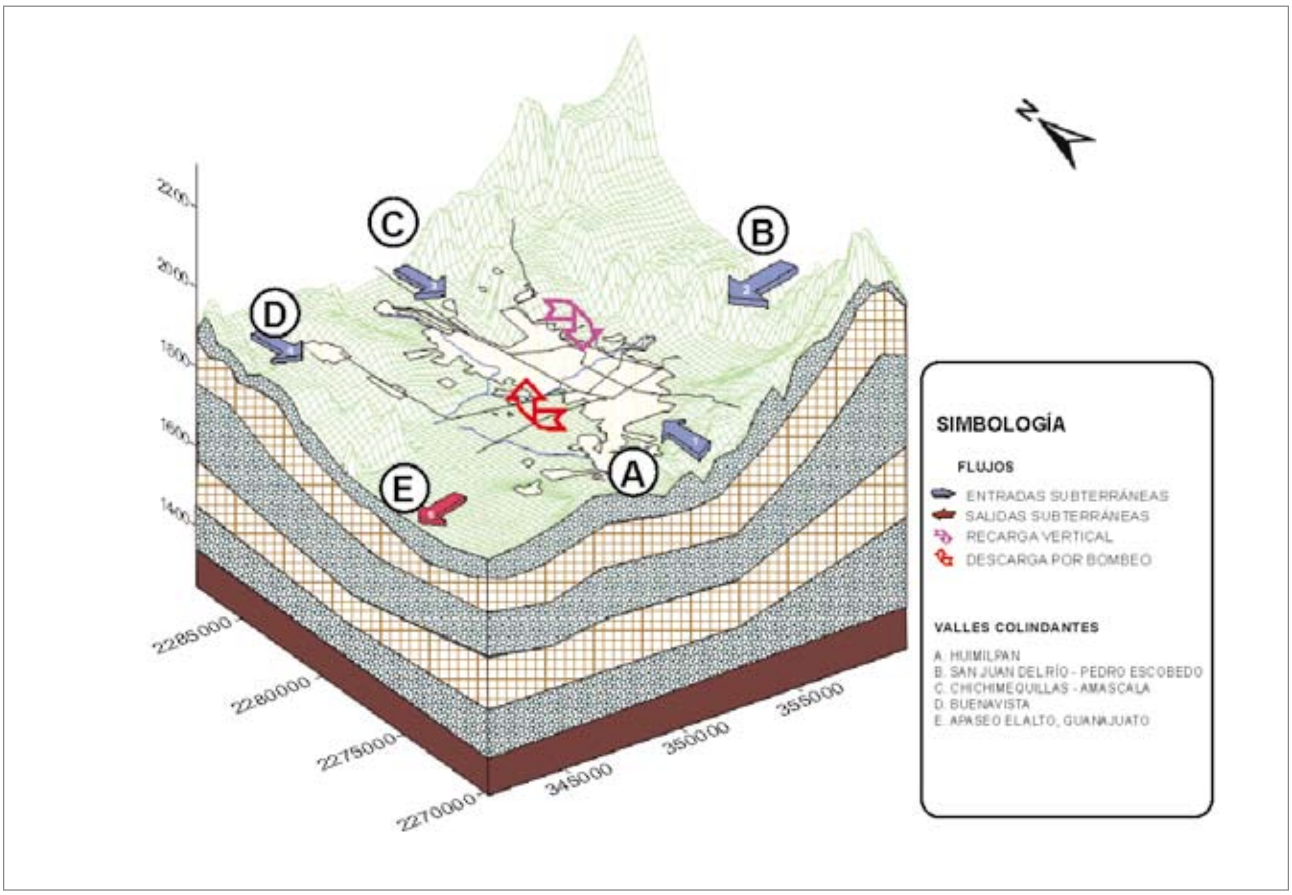

Figura 5. Modelo conceptual del acuífero Valle de Querétaro.

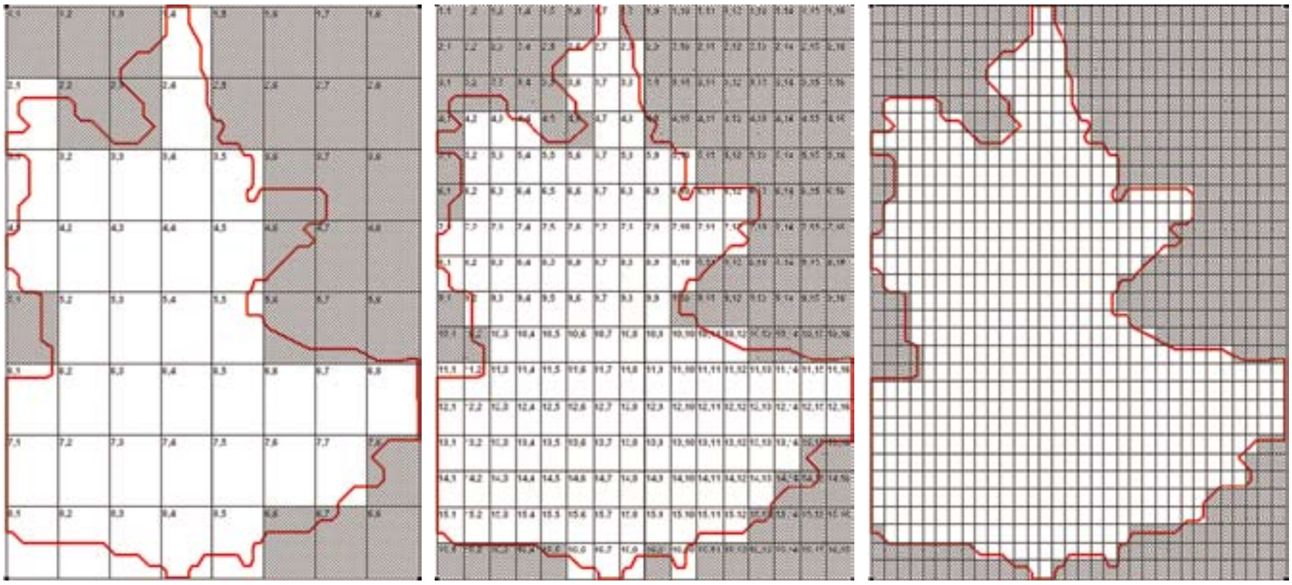

Figura 6. Multiescala de 8x8, 16x16 y 32x32 para el acuífero Valle de Querétaro.

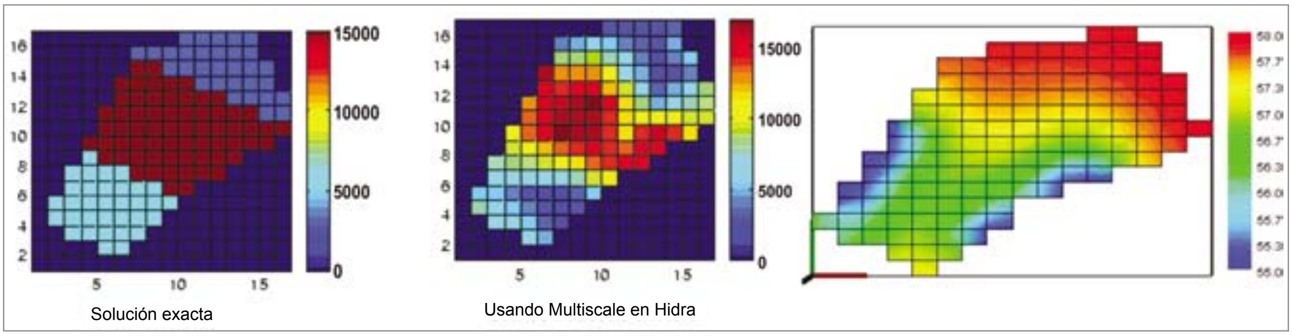

Figura 7. a) Resultados del problema por el método de prueba y error, b) Estimación de K con Multiescala, y c) Representación de (h) con Multiescala.

RESULTADOS EXPERIMENTALES

En el presente trabajo no se dan resultados gráficos de todas las opciones que brinda el programa MFK_MS, sólo se muestran los considerados más representativos, figura 7 (Pérez, A. et al., 2002). Los experimentos realizados en el acuífero Ariguanabo usando MODFLOW–2000 con los dos optimizadores que se probaron se pudieron reproducir, tal y como se esperaba, las tres zonas del problema.

En la figura 8 se muestran dos diferentes calibraciones del acuífero del Valle de Querétaro (Gallardo, 2005). La de la izquierda usando MODFLOW–2000 usando el problema sintético descrito anteriormente (problema de prueba y error) y los gráficos de la derecha son la carga hidráulica como resultado de la calibración con multiescala y la estimación de la conductividad hidráulica. Obsérvese la similitud de estas curvas de nivel, que representan una buena estimación de las conductividades obtenidas por multiescala.

Las calibraciones realizadas usando MFK_MS mostraron, en general, que son más confiables aquellas que incluyen regularización, sea “multiescala” o regularización de Tíjonov.

En la figura 9 se grafican las cargas hidráulicas observadas contra cargas hidráulicas calculadas, los resultados de la simulación nos indica que los valores de carga hidráulica están subestimados. En la misma figura se muestra el ajuste del modelo mediante el reporte de estadísticos de los residuales entre valores calculados y observados. Se observa que la raíz del error cuadrático medio normalizado (NRMS) es mucho menor al 10%, esto nos indica que tiene buen ajuste (Waterloo Hydrogeologic, 2004), además son reportados otros estadísticos de interés.

CONCLUSIONES

MODFLOW ha demostrado ser una herramienta poderosa en la simulación de acuíferos y para la experimentación numérica. Las herramientas creadas a partir de cambios introducidos a MODFLOW–2000 permitirán, a partir de una amplia experimentación establecer comparaciones concluyentes de las técnicas propuestas y algunas existentes que permitan optar por adquirir o actualizar software profesional en la temática.

Las herramientas creadas, MFK_MS, se han usado y obtenido buenos resultados en problemas sintéticos

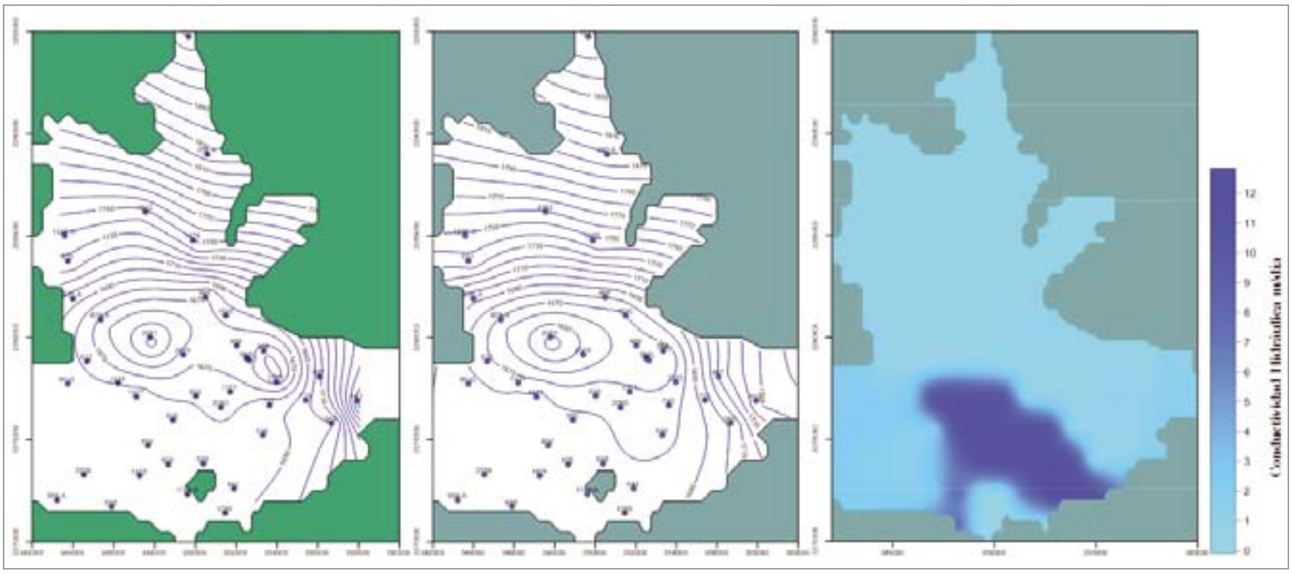

Figura 8. a) Resultados del problema por el método de prueba y error, b) Representación de (h) con Multiescala, y c) Estimación de K con Multiescala.

en los acuíferos Aeropuerto (Cuba) y Valle de Querétaro (México) de una sola capa.

Como conclusión podemos decir que el proceso de cálculo es muy rápido para las primeras mallas debido a que la dimensión de los espacios es pequeña y la función objetivo resultante es suave y convexa, lo que permite obtener una buena aproximación con un bajo costo computacional. El método nos permite obtener el mismo mínimo a partir de distintas aproximaciones iniciales.

Estos resultados pueden ser aplicados a casos reales.

El inconveniente fundamental es que aumenta considerablemente el número de parámetros a estimar, por lo que sería necesaria una adaptación de "multiescala" al problema con zonas.

Implementar una "multiescala" más automática, así como hacer comparaciones con simulaciones realizadas con otro software de estimación como PEST (Doherty J., 2003).

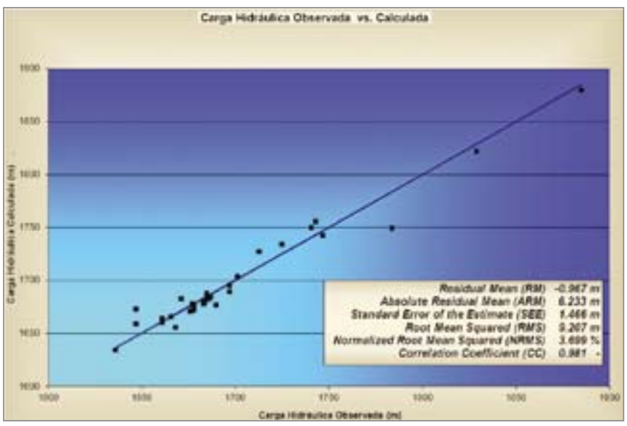

Figura 9. Estadísticos de la calibración en el acuífero Valle de Querétaro

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Argus Interware, Inc. 1997. User's Guide Argus ONE. Argus Open Numerical Environments–A GIS Modeling System. Versión 4.0. Argus Holdings. Jericó, New York. USA.

Castellanos J. L, Gómez S., Guerra V. 2002. Triangle method for calculating corner of L–curve. Applied Numerical Mathematics. Vol. 43: 359–373.

Doherty J. 2003. Ground Water Model Calibration Using Pilot Point and Regularization. Ground Water. Vol. 41, no. 2:170–177.

Gallardo, P. 2005. Estimación de la conductividad hidráulica del acuífero del Valle de Querétaro mediante técnicas inversas. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México. México, D.F. 106 p.

Gómez S., Pérez A. D., Álvarez Rosa M. 1998. The Multiscale Optimization for aquifer Parameter Identification with noise data. Computational Methods in Water Resources XII. England. Computational Mechanics Publications. Vol. 2.

GUYSA, S.A. de C.V. 1996. Estudio de simulación hidrodinámica y diseño óptimo de la red de observación de los acuíferos de Aguascalientes y Querétaro. Geofísica de Exploraciones. México.

Nocedal J., Stephen J. Wright. 1999. Numerical Optimization. Springer Verlag. New York.

Pérez A., Castellanos L. 1999. Algoritmo de discretización para diferencias finitas en una región plana convexa. Reporte de Investigación. ICIMAF. ISSN 0138–8916. Habana, Cuba.

Pérez Ángel D., Gómez S. 2001. ESTIM Programa para la estimación de transmisividades en acuíferos confinados. Breve manual de usuario.

Pérez Ángel D. et al. 2002. Informe de resultados del convenio IIMAS–IMTA: Comparación de Métodos de Modelación Inversa para la caracterización de acuíferos. Jiutepec, Morelos.

Poeter, E. P. 1998. Documentation of UCODE, A computer code for universal inverse modeling, U.S. Geological Survey Water Resources Investigations Report 98-4080.

Waterloo Hydrologic, 2004. User's manual: Visual MODFLOW v.4.0, Waterloo Hydrogeology, Inc., Ontario, Canada.

Yeh, William 1986. Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem. Water Resources Research. Vol. 22, no. 2:95-108.

USGS. MODFLOW–2000. 2000. The U.S. Geological Survey Modular Ground–Water Model User Guide to the Observation, Sensitivity, and Parameter–Estimation Processes and Three Post–Processing Programs. Open–File Report 00–184, Denver, Colorado.