

Artículo de investigación



## Análisis de Frecuencias de Crecientes bivariado con dependencia regional y Funciones Cópula

### *Bivariate Flood Frequency Analysis with regional dependence and Copula Functions*

Daniel Francisco Campos Aranda <sup>1,\*</sup>

\*Autor de correspondencia

#### HISTORIA DEL ARTÍCULO

Recibido 1 Febrero 2023  
Revisado 20 Junio 2023  
Aceptado 6 Agosto 2023  
Publicado 11 Agosto 2023

#### PALABRAS CLAVE

Funciones Cópula, coeficiente de Spearman, cociente de Kendall, dependencia observada, periodos de retorno, periodo de retorno secundario

#### KEYWORDS

*Copula functions, Spearman's rho coefficient, Kendall's tau ratio, upper bound dependence, observed dependence, AND-type return periods, secondary return period.*

#### Resumen

Con base en las Crecientes de Diseño (CD) se dimensionan por seguridad hidrológica las diversas obras hidráulicas de protección. Su estimación más confiable se obtiene con el Análisis de Frecuencias (AF), el cual representa a los gastos máximos anuales disponibles con una función de distribución de probabilidades (FDP) idónea, para estimar las predicciones buscadas. En este estudio el AF se realiza con un enfoque bivariado, procesando un registro base de gastos  $QX$  y otro auxiliar  $QY$ , que está correlacionado con el primero y tienen igual amplitud. Se describe con detalle cómo se verifica que los gastos  $QX$  y  $QY$  sean simultáneos, es decir, que pertenezcan al mismo evento analizado. La FDP conjunta de gastos se obtuvo mediante la Función Cópula de Gumbel–Hougaard, que mostró excelente ajuste y reprodujo la dependencia  $\lambda_{IJ}^{CFG}$  observada en los gastos. La aplicación numérica que se expone procesó 33 gastos anuales y se realizó en las estaciones hidrométricas Huites y San Francisco de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México. Como sus registros de gastos máximos anuales están integrados por dos tipos de eventos mezclados, los frecuentes de magnitud reducida y las escasas crecientes extraordinarias, sus FDP marginales fueron representadas por la distribución Gumbel de dos poblaciones, cuyos cinco parámetros de ajuste se obtuvieron vía optimización numérica no restringida. Por último, se formulan las Conclusiones, las cuales destacan la importancia del enfoque bivariado para estimar CD más severas o críticas.

#### Abstract

*Hydraulic protection works are sized based on Design Floods (DF) for hydrological safety reasons. Its most reliable estimate is calculated using the Frequency Analysis (FA), which represents the maximum annual flows available with a suitable probability distribution function (PDF). In this study, the FA is carried out with a bivariate approach, processing a base record of flows  $QX$  and another auxiliary record  $QY$  (correlated to the first one and with equal length). Details are given on how it is verified that the  $QX$  and  $QY$  flows are simultaneous, that is, that they belong to the same analyzed event. The joint PDF of flows was obtained using the Gumbel–Hougaard Copula Function, which showed an excellent fit and reproduced the dependence  $\lambda_{IJ}^{CFG}$  observed in flows. A numerical application processed 33 annual flows and was carried out at the Huites and San Francisco hydrometric stations of the Hydrological Region No. 10 (Sinaloa), Mexico. Their records of maximum annual flows are made up of two types of mixed events: the frequent ones of reduced magnitude and the few extraordinary floods; hence their marginal PDFs were represented by the Gumbel distribution of two populations, whose five fitting parameters were obtained via non-restricted numerical optimization. Finally, the Conclusions are formulated, which highlight the importance of the bivariate approach to estimate more severe or critical DFs.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La República Mexicana se localiza en la zona de influencia de los huracanes que se originan en el mar Caribe y en el océano Pacífico. Además, la afectan otros fenómenos meteorológicos de gran alcance espacial, como son los frentes fríos y las tormentas convectivas y orográficas extensas. Tales fenómenos generan Crecientes o Avenidas Máximas que inundan diversas regiones del país; originando pérdida de vidas humanas y enormes daños económicos y ambientales (Aldama et al., 2006). El estudio básico de las crecientes se denomina Análisis de Frecuencias (AF) y permite estimar las Crecientes de Diseño (CD), que son gastos máximos del río asociados a bajas probabilidades de ser excedidos. Con base en las CD se dimensionan por seguridad hidrológica diversas obras hidráulicas de protección como muros y diques de contención, puentes, rectificaciones y canalizaciones de ríos, drenaje urbano, etc. Para que la estimación de las CD sea confiable, el registro de gastos máximos anuales procesado debe ser aleatorio, la Función de Distribución de Probabilidades (FDP) utilizada para obtener las predicciones buscadas debe ser idónea y el método empleado para su ajuste eficiente. Por último, la selección de resultados debe ser objetiva. Los AF comenzaron a mediados del siglo pasado e inicialmente fueron de carácter univariado, procesando por lo general el gasto máximo anual. Hacia finales de tal siglo comenzaron los AF bivariados, con dos enfoques. El primero, utilizó otras variables del hidrograma de las crecientes anuales, como su volumen escurrido y la duración total (Goel et al., 1998; Yue et al., 1999). El segundo enfoque empleó registros auxiliares, con cercanía regional que mostraban correlación y tenían amplitudes diferentes. Estos AF se llevaron hasta el nivel trivariado (Escalante-Sandoval y Raynal-Villaseñor, 1994; 2008).

En este estudio, el AF se aborda bajo un enfoque bivariado, con un registro base (QX) y otro auxiliar

(QY), que están correlacionados y tienen igual número de años de registro. La FDP que va a representar ambos registros, se construye con base en sus distribuciones univariadas idóneas previamente adoptadas, por medio de una Función Cópula (FC). Las predicciones estimadas con la FC adoptada, se contrastan contra las obtenidas con una FDP univariada, ajustada al registro completo QX. Cuando las CD que proceden de la FC son mayores que las del AF univariado, el estudio bivariado se considera exitoso, ya que condujo a predicciones más severas o críticas.

## 2. TEORÍA OPERATIVA Y DATOS PROCESADOS

### 2.1 Teoría básica de las Funciones Cópula

#### 2.1.1 Utilidad de las Funciones Cópula

Las Funciones Cópula (FC) permiten expresar una distribución de probabilidades conjunta de variables aleatorias correlacionadas, como una función de sus distribuciones marginales, previamente adoptadas. El uso de las FC ofrece entera libertad para adoptar o seleccionar las distribuciones marginales univariadas que mejor representen a los datos (Meylan et al., 2012; Zhang & Singh, 2019).

#### 2.1.2 Familias de Cópulas aplicadas

Designando a las distribuciones marginales por  $F_X(x)=u$ ,  $F_Y(y)=v$  y  $\theta$  al parámetro que mide la asociación o correlación entre  $u$  y  $v$ , se tienen las siguientes dos familias de FC de gran aplicación en hidrología (Nelsen, 2006; Salvadori et al., 2007; Zhang & Singh, 2019; Chen & Guo, 2019; Chowdhary & Singh, 2019).

La FC de *Plackett* es de la familia de clase miscelánea, acepta dependencia negativa ( $\theta < 1$ ) y positiva ( $\theta > 1$ ), con  $\theta=1$  para la independencia entre  $u$  y  $v$ :

$$C(u, v) = \frac{1+(\theta-1)(u+v)}{2(\theta-1)} - \frac{\sqrt{[1+(\theta-1)(u+v)]^2 - 4uv\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)} \text{ con } 0 \leq \theta \leq \infty \quad (1)$$

La relación de  $\theta$  con el coeficiente rho de *Spearman* es la siguiente:

$$\rho_n = \frac{(\theta + 1)}{(\theta - 1)} - \frac{2\theta \ln(\theta)}{(\theta - 1)^2} \quad (2)$$

La FC de *Gumbel–Hougaard* es de la familia de valores extremos, la cual acepta sólo dependencia positiva. Su ecuación y espacio de variación de  $\theta$  son:

$$C(u, v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right\} [1, \infty) \quad (3)$$

Con  $\theta = 1$  se tiene independencia entre  $u$  y  $v$ . La relación de  $\theta$  con el cociente tau de *Kendall* es la siguiente:

$$\tau_n = \frac{\theta - 1}{\theta} \quad (4)$$

### 2.1.3 Estimación del parámetro de asociación

El método más simple para estimar el parámetro  $\theta$  de las FC, se asemeja al método de momentos y se basa en la inversión de la ecuación 2 y 4, que relaciona a  $\theta$  con el coeficiente rho de *Spearman* o con cociente tau de *Kendall*.

### 2.1.4 Coeficiente rho de Spearman

Mide la correlación entre parejas de rangos ( $R_i, S_i$ ) de las variables aleatorias  $X_i$  y  $Y_i$ . Su expresión para estimarlo en un registro bivariado de tamaño  $n$  es la siguiente (Chowdhary & Singh, 2019; Zhang & Singh, 2019):

$$\rho_n = \frac{12}{n(n+1)(n-1)} \sum_{i=1}^n R_i \cdot S_i - 3 \frac{n+1}{n-1} \quad (5)$$

### 2.1.5 Cociente tau de Kendall

Mide la probabilidad de tener parejas concordantes, que al aumentar una la otra también lo hace y son discordantes, cuando a grandes valores de una le

corresponden pequeños valores de la otra. Su expresión para estimarlo con datos bivariados es (Zhang & Singh, 2006, 2019):

$$\tau_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{signo}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \quad (6)$$

en la ecuación anterior, el signo[·] es +1 si el producto de los paréntesis es mayor que cero y -1 si tal producto es menor que cero.

Las probabilidades empíricas u observadas se estimaron con base en la fórmula de posición gráfica de *Gringorten*, aplicada por Zhang y Singh (2019), Chen y Guo (2019) y Campos-Aranda (2023). Tal fórmula es:

### 2.1.6 Estimación de probabilidades empíricas conjuntas

$$F_o(x) = \frac{i - 0.44}{n + 0.12} \quad (7)$$

en la cual,  $i$  es el número de cada dato, cuando están ordenados de manera progresiva y  $n$  su número total. La expresión anterior se aplicó en el plano bidimensional; los gastos máximos en la estación  $X$  en los renglones y los de la estación  $Y$  en las columnas. Después cada pareja de datos anual ( $QX$  y  $QY$ ) se localiza en el plano bidimensional y la casilla definida por la intersección del renglón y columna, se identifica con el número del año histórico dibujado.

Cuando las  $n$  parejas de datos están dibujadas, se busca el año 1 y se define su área rectangular o cuadrada de valores menores de  $QX$  y de  $QY$ , cuyo conteo de casillas numeradas dentro, es  $NXY_1$  o combinaciones de  $QX$  y  $QY$  menores. Calculados los  $n$  valores de  $NXY_i$ , se aplica la ecuación 7 para estimar la probabilidad empírica conjunta o bivariada:

$$F_o(x, y) = P(QX \leq qx, QY \leq qy) = \frac{NXY_i - 0.44}{n + 0.12} \quad (8)$$

### 2.1.7 Selección de la Función Cópula

Un enfoque simple de selección de la función Cópula, se basa en los estadísticos del error de ajuste, al comparar las probabilidades empíricas observadas ( $w_i^o$ ) contra las teóricas calculadas ( $w_i^c$ ) con la  $FC$

que se prueba. Los indicadores aplicados son el error medio estándar ( $EME$ ), el error medio absoluto ( $EMA$ ) y el error absoluto máximo ( $EAM$ ); sus expresiones son (Chowdhary & Singh, 2019):

$$EME = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i^o - w_i^c)^2} \quad (9)$$

$$EMA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |(w_i^o - w_i^c)| \quad (10)$$

$$EAM = \max_{i=1:n} |(w_i^o - w_i^c)| \quad (11)$$

Un contraste gráfico de las probabilidades conjuntas empíricas y teóricas, se obtiene al llevar al eje de las abscisas la primera y al eje de las ordenadas la segunda; en tal gráfica, cada pareja de datos define un punto que coincide o se aleja de la recta a  $45^\circ$ ; cuyo valor del coeficiente de correlación debe ser superior a 0.98.

### 2.1.8 Dependencia en el extremo superior

El criterio más importante que se aplica para seleccionar una  $FC$  bivariada, es el basado en la magnitud de la dependencia en el extremo superior de la distribución conjunta, lo cual tiene impacto en la veracidad de las predicciones extremas. La

dependencia en la cola superior derecha ( $\lambda_{UJ}$ ) es la probabilidad condicional de que  $Y$  sea mayor que un cierto percentil ( $s$ ) de  $F_Y(y)$ , dado que  $X$  es mayor que tal percentil en  $F_X(x)$ ; conforme  $s$  se aproxima a la unidad. La dependencia en la cola inferior izquierda ( $\lambda_L$ ), compara que  $Y$  sea menor que  $X$ , cuando  $s$  se aproxima a cero (Nelsen, 2006; Chowdhary & Singh, 2019; Salvadori et al., 2007).

En relación con las dos  $FC$  expuestas, de la *Plackett* tiene dependencias insignificantes en sus zonas extremas; en cambio, la de *Gumbel-Hougaard* tiene dependencia significativa en la cola superior, igual a (Salvadori et al., 2007; Chowdhary & Singh, 2019):

$$\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta} \quad (12)$$

2.1.9 Estimación de la dependencia observada

Para abordar la estimación de la dependencia en la cola superior ( $\lambda_U$ ) que muestran los datos disponibles, se debe definir primero la llamada Cópula Empírica. Como la FC que caracteriza la dependencia entre las

variables aleatorias  $X$  y  $Y$ ; entonces su par de rangos  $R_i$  y  $S_i$  y su escalamiento con el factor  $1/(n+1)$ , genera una serie de puntos en el cuadrado unitario  $[0,1]^2$ , formando el dominio de la Cópula Empírica (Chowdhary & Singh, 2019), definida así:

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i = \frac{R_i}{n+1} \leq u, V_i = \frac{S_i}{n+1} \leq v) \quad (13)$$

Poulin et al. (2007) y Requena et al. (2013) utilizan el estimador propuesto por Frahm et al. (2005), el cual está basado en una muestra aleatoria obtenida de la

Cópula empírica, su designación proviene de sus autores Capéraà, Fougères y Genest (1997), expresión es:

$$\lambda_U^{CFG} = 2 - 2 \exp \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left[ \sqrt{\ln \frac{1}{U_i} \cdot \ln \frac{1}{V_i} / \ln \left( \frac{1}{\max(U_i, V_i)^2} \right)} \right] \right\} \quad (14)$$

Este estimador acepta que la FC se puede aproximar por una de la clase de valores extremos y tiene la ventaja de no requerir un valor umbral para su estimación, como es el caso de los cuatro estimadores expuestos por AghaKouchak et al. (2013).

2.2 Teoría básica de los periodos de retorno conjuntos

2.2.1 Periodos de retorno tipo OR

El primer periodo de retorno bivariado del evento  $(X, Y)$  se define bajo la condición OR, lo cual indica que los límites  $x$  ó  $y$ , o ambos pueden ser excedidos y entonces, la ecuación clásica del periodo de retorno o inverso de la probabilidad de excedencia será (Chen & Guo, 2019; Zhang y Singh, 2019):

$$T(X, Y) = \frac{1}{P(X > x \text{ or } Y > y)} = \frac{1}{1 - F_{X,Y}(x, y)} = \frac{1}{1 - C[F_X(x), F_Y(y)]} \quad (15)$$

en la cual,  $C[F_X(x), F_Y(y)]$  es la FC utilizada.

2.2.2 Periodos de retorno tipo AND

El segundo periodo de retorno bivariado del evento  $(X, Y)$  está asociado al caso en que ambos límites son excedidos ( $X > x, Y > y$ ) o condición AND, su ecuación es (Chen & Guo, 2019; Zhang y Singh, 2019):

$$T'(X, Y) = \frac{1}{P(X > x \text{ and } Y > y)} = \frac{1}{F'_{X,Y}(x, y)} = \frac{1}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C[F_X(x), F_Y(y)]} \quad (16)$$

### 2.2.3 Periodos de Retorno Secundario

Salvadori y De Michele (2004) introducen con detalle el concepto del Periodo de Retorno Secundario ( $\zeta$ ), designado así para enfatizar que el periodo de retorno

conjunto  $T_{XY}$  es el primario, de donde procede al utilizar las isolíneas que define la  $FC$  aplicada, cuya expresión es:

$$L_s = \{(u, v) \in \mathbb{I}^2 : C(u, v) = s\} \quad (17)$$

siendo,  $s$  la variable aleatoria unitaria  $0 < s \leq 1$  y  $C$  la  $FC$  probada. Después, se define una región  $B_C(s)$

en el espacio unitario ( $\mathbb{I}^2$ ) sobre la isolínea, debajo de ella y a la izquierda, que será:

$$B_C(s) = \{(u, v) \in \mathbb{I}^2 : C(u, v) \leq s\} \quad (18)$$

En  $FC$  de la clase de Arquímedes, la distribución univariada de *Kendall*, designada  $K_C(s)$ , proporciona una medida de los eventos dentro de la  $B_C(s)$ ; su

ecuación es (Barbe et al. 1996; Salvadori & De Michele, 2004; Nelsen, 2006; Salvadori et al., 2007; Gräler et al., 2013):

$$K_C(s) = s - \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \quad (19)$$

en la cual,  $\phi(s)$  es el generador de la  $FC$  y  $\phi'(s)$  su derivada. Por último, el periodo de retorno secundario ( $\zeta$ ) de los eventos fuera de  $B_C(s)$ , es:

$$\zeta = \frac{1}{1 - K_C(s)} \quad (20)$$

cuyo denominador es la probabilidad de excedencia (*survival function*), la cual corresponde a eventos posiblemente destructivos o eventos peligrosos. La aplicación de la ecuación 20, requiere la estimación previa de la ecuación 19, para las siguientes seis probabilidades de no excedencia ( $s$ ): 0.90, 0.96, 0.98,

0.99, 0.998 y 0.999, que corresponden a los periodos de retorno conjuntos de 10, 25, 50, 100, 500 y 1000 años. En la  $FC$  de *Gumbel-Hougaard*, las ecuaciones de su generador y su derivada son las siguientes (Zhang y Singh, 2019):

$$\phi(s) = (-\ln s)^\theta \quad (21)$$

$$\phi'(s) = -\frac{\theta}{s} (-\ln s)^{\theta-1} \quad (22)$$

### 2.2.4 Eventos críticos o de diseño

Volpi y Fiori (2012) destacan que la gráfica del periodo de retorno conjunto de tipo AND, mostrada más adelante como figura 2, presenta una severa inconsistencia al contener, en un contexto bivariado, umbrales críticos univariados. Debido a lo anterior, tal gráfica se considera integrada por dos porciones, las dos designadas *simples (naive part)* y la correcta

(*proper part*). Las partes rectas son las colas o rectas asíntotas a la parte curva. La probabilidad de ocurrencia de un evento o pareja de  $QX$  y  $QY$ , es variable en la parte curva y decrece a lo largo de la parte recta, aunque todos los valores definen el mismo periodo de retorno conjunto. Por lo anterior, los eventos críticos están en la porción curva de las gráficas de  $T^*(X, Y)$ .

### 2.3 Datos por procesar

#### 2.3.1 Estaciones hidrométricas utilizadas

Se localizan al norte de la Región Hidrológica 10 (Sinaloa), México. El río Fuerte está aforado en la estación Huites con área de cuenca de 26057 km<sup>2</sup> y lo forman los ríos Chínipas y Urique, el primero se ubica al norte y se registra en la estación Palo Dulce con 6439 km<sup>2</sup> de cuenca y el segundo proviene del sur y se afora en la estación San Francisco con 17531 km<sup>2</sup> de área drenada (IMTA, 2003). La estación Huites comenzó a operar en septiembre de 1941 y concluyó al inicio de 1993, cuando su régimen fue afectado por la construcción de la presa Luis Donaldo Colosio (Huites). La estación San Francisco comenzó a operar en noviembre de 1941 y tuvo interrupciones en el final de 1943 e inicios de 1944. Su operación concluyó en abril de 1974 (IMTA, 2003; Aldama et al., 2006).

#### 2.3.2 Concepto de eventos simultáneos

Desde el inicio de los análisis de frecuencias de crecientes bivariados, con los trabajos de Goel et al. (1998) y de Yue et al. (1999) se estableció que las variables correlacionadas gasto pico, volumen escurrido y duración total, deberían de proceder del hidrograma aceptado como la creciente máxima anual. Ahora que los análisis bivariados y trivariados buscan crecientes que muestran correlación regional, estos eventos deberán de ser simultáneos en relación con la fecha de ocurrencia de tal creciente anual. Por lo anterior, la búsqueda de tales crecientes se restringe a eventos observados en estaciones hidrométricas ubicadas en colectores de una misma cuenca hidrográfica; o bien, de cuencas adyacentes. En la tabla 1 se muestran los 33 eventos simultáneos de crecientes anuales en las estaciones Huites y San Francisco, de la cuenca del río Fuerte, tomados del archivo denominado Gastos Máximos Mensuales con seis años por página; el cual expone el día, la hora, el gasto máximo y la lectura de escala (IMTA, 2003). Se indican sombreados los únicos tres años en que las crecientes en la estación San Francisco no corresponden con sus máximas anuales.

$$F(x) = e^{-e^{-(x-u_1)/a_1}} \left[ p + (1-p)e^{-e^{-(x-u_2)/a_2}} \right] \quad (23)$$

en la cual,  $x$  es el gasto máximo anual (m<sup>3</sup>/s) para el cual se estima la probabilidad de no excedencia  $F(x)$ ,  $u_1$  y  $a_1$  son los parámetros de ubicación y escala de la población no ciclónica y  $u_2$  y  $a_2$  los de la ciclónica;

#### 2.3.3 Test de Wald–Wolfowitz

Esta prueba no paramétrica ha sido utilizada por Rao y Hamed (2000) y Meylan et al. (2012) para verificar independencia y estacionariedad en registros de gastos máximos anuales ( $X_i$ ). Por lo anterior, se aplicó a los registros conjuntos  $QX$  y  $QY$ , así como al  $QX$  completo, que deben ser muestras aleatorias.

### 2.4 Selección de las distribuciones marginales

#### 2.4.1 Generalidades

En la tabla 1, respecto a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales de la estación de aforos Huites se detecta lo siguiente: ocho eventos acontecen en enero y febrero y en ellas están las más grandes, como en 1949 y 1960; además, de 1955 y 1973. El resto de crecientes son de magnitud media o baja y se presentan de mediados de julio a mediados de diciembre. Las crecientes extraordinarias fueron provocadas por los Frentes Fríos que generan tormentas extensas, de varios días y baja intensidad. Cuando un registro de crecientes anuales está formado por eventos que proceden de dos tipos diferentes de mecanismos de formación, su procesamiento probabilístico debe ser abordado con FDP que fueron diseñadas para poblaciones mezcladas. Actualmente se dispone de tres modelos que son: [1] la llamada distribución *Gumbel* de dos poblaciones, propuesta por González-Villarreal (1970); [2] la designada TCEV (*two-component extreme value*) sugerida por Rossi et al. (1988) y [3] la denominada por Molina-Aguilar et al. (2018) *Gumbel mixta*.

#### 2.4.2 FDP utilizada

Para este estudio se adopta como modelo probabilístico a la distribución *Gumbel* de dos poblaciones (DG2P), con cinco parámetros de ajuste, cuyos valores óptimos se obtienen mediante optimización numérica no restringida (Campos-Aranda, 1989; 2003). La ecuación de la DG2P es la siguiente:

todos con unidades de gasto.  $p$  es la probabilidad de tener eventos no ciclónicos. Los eventos ciclónicos son las crecientes extraordinarias.

Tabla 1. Crecientes anuales ( $m^3/s$ ) en la estación Huites y sus eventos simultáneos en la estación San Francisco de la Región Hidrológica 10 (Sinaloa), México

No.	Año	Huites ( $n = 33$ )		San Francisco ( $n = 33$ )		$NXY_i$	Huites ( $n = 52$ )	
		$QX$	Fecha	$QY$	Fecha		Año	$QX$
1	1941	2084.0	12-DIC	1326.0	12-DIC	18	1974	3790.0
2	1942	2531.0	19-AGO	1558.0	19-AGO	21	1975	1095.0
3	1943	14378.0	09-DIC	2292.0	sin datos	27	1976	2677.0
4	1944	2580.0	27-FEB	1376.0	sin datos	21	1977	1135.0
5	1945	1499.2	30-JUL	894.0	29-JUL	10	1978	4790.0
6	1946	1164.8	30-AGO	558.6	30-AGO	4	1979	6860.0
7	1947	1127.3	29-AGO	1137.2	29-AGO	6	1980	1496.0
8	1948	3215.0	05-FEB	1668.0	05-FEB	23	1981	4828.1
9	1949	10000.0	15-ENE	4710.0	14-ENE	30	1982	2450.0
10	1950	3229.3	13-ENE	2920.0	13-ENE	27	1983	8275.0
11	1951	677.0	14-DIC	493.0	14-DIC	2	1984	5580.0
12	1952	1266.0	14-AGO	695.0	22-JUL	7	1985	3585.0
13	1953	1025.0	22-JUL	381.0	27-JUL	1	1986	1348.8
14	1954	954.8	19-AGO	683.0	18-AGO	4	1987	1429.2
15	1955	4780.3	15-ENE	3101.0	15-ENE	28	1988	1866.3
16	1956	695.7	23-AGO	582.7	23-AGO	3	1989	1868.5
17	1957	593.0	05-OCT	433.7	03-SEP	1	1990	11558.6
18	1958	3010.0	21-SEP	3750.0	20-SEP	26	1991	2563.1
19	1959	1908.0	03-OCT	749.0	03-OCT	10	1992	2025.3
20	1960	15000.0	12-ENE	6640.0	12-ENE	33	-	-
21	1961	1396.3	24-ENE	880.3	24-ENE	9	-	-
22	1962	1620.0	05-OCT	997.1	05-OCT	13	-	-
23	1963	2702.0	12-DIC	2133.6	12-DIC	24	-	-
24	1964	1319.1	01-AGO	735.0	01-AGO	8	-	-
25	1965	1944.0	23-DIC	654.9	23-DIC	7	-	-
26	1966	2420.0	19-AGO	2144.4	19-AGO	21	-	-
27	1967	2505.8	16-DIC	1175.4	16-DIC	18	-	-
28	1968	1534.3	01-AGO	1308.0	31-JUL	13	-	-
29	1969	1508.0	17-JUL	605.0	17-JUL	6	-	-
30	1970	1558.0	13-AGO	980.0	13-AGO	12	-	-
31	1971	2200.0	26-OCT	950.0	27-OCT	14	-	-
32	1972	2225.0	24-NOV	2128.8	24-NOV	20	-	-
33	1973	7960.0	22-FEB	4855.0	22-FEB	30	-	-



La función objetivo ( $FO$ ) a minimizar es la suma de las diferencias al cuadrado entre las probabilidades empíricas observadas (ecuación 7) y las teóricas

obtenidas con la ecuación 23, para los cinco parámetros de ajuste o variables de decisión; su expresión es:

$$FO = \sum_{i=1}^n W_i [F_o(x) - F(x)]^2 \quad (24)$$

en la cual,  $n$  es el número total de datos y  $W_i$  es el peso asignado a cada error; por lo general, la unidad. Para iniciar el proceso de minimización el algoritmo de *Rosenbrock* utiliza como valores iniciales las estimaciones del método de momentos de cada población (Kite, 1977; Rao & Hamed, 2000). Por lo anterior, primero se dibujan en el papel de

probabilidad extremo de *Gumbel-Powell*, los datos de cada registro  $QX$  y  $QY$ , con base en la ecuación 7 y se definen las poblaciones no ciclónica y ciclónica, cuyo número de eventos es  $nc$ . Además, se obtienen la media ( $M$ ) y desviación estándar ( $S$ ) de cada población. Las ecuaciones de los parámetros iniciales son:

$$a_1 = 0.7797 \cdot S_1 \quad (25)$$

$$u_1 = M_1 - 0.5772 \cdot a_1 \quad (26)$$

$$a_2 = 0.7797 \cdot S_2 \quad (27)$$

$$u_2 = M_2 - 0.5772 \cdot a_2 \quad (28)$$

$$p = \frac{n - nc}{n} \quad (29)$$

#### 2.4.3 FDP de contraste

Con propósitos de contraste de errores de ajuste y predicciones, se aplicaron las distribuciones *Kappa* de cuatro parámetros de ajuste y la *Wakeby* con cinco, ambas por medio del método de los momentos L (Hosking & Wallis, 1997).

#### 2.4.4 Errores de ajuste

La selección de la mejor FDP a un registro disponible, se realiza con los llamados errores de ajuste (Kite, 1977). Cambiando en las ecuaciones 9 y 10, las probabilidades observadas por los datos ordenados del registro analizado  $QX$  y  $QY$  y las probabilidades calculadas por los valores estimados con la FDP que se prueba (ecuación 23), se obtienen el error estándar de ajuste ( $EEA$ ) y el error absoluto medio ( $EAM$ ). Los valores que se estiman se obtienen para la probabilidad de no excedencia, asignada a los datos con la ecuación 7.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 3.1 Verificación de la aleatoriedad

La aplicación del Test de *Wald-Wolfowitz* a los tres registros de crecientes de la tabla 1, dos con  $n=33$  y otro con 52 datos en Huites, reportó los siguientes tres valores del estadístico U: -0.117, -0.282 y -0.092. Por lo anterior, tales registros son aleatorios.

#### 3.2 Distribuciones marginales adoptadas

En la tabla 2 se exponen los resultados del ajuste de las tres FDP aplicadas a los tres registros de crecientes de la Tabla 1. Se observa que en los tres casos la DG2P, conduce a los errores de ajuste más bajos y por lo tanto, fue la adoptada. También se deduce que las distribuciones *Kappa* y *Wakeby*, reportan predicciones más severas, excepto la *Kappa* en el registro de la estación San Francisco. En la tabla 2 se muestran sombreadas las predicciones univariadas de contraste de la estación Huites.

Tabla 2. Parámetros de ajuste óptimos de la DG2P, errores de ajuste y predicciones (m<sup>3</sup>/s) de las tres FDP aplicadas a las crecientes anuales de las estaciones Huites y San Francisco, México

Estación y FDP:	EEA (m <sup>3</sup> /s)	EAM (m <sup>3</sup> /s)	Periodos de retorno, en años					
			10	25	50	100	500	1000
<i>Huites: n = 33; nc = 5; u<sub>1</sub> = 1444.332; a<sub>1</sub> = 780.9298;</i>								
<i>u<sub>2</sub> = 9352.656; a<sub>2</sub> = 4411.265; p = 0.863978</i>								
DG2P	688.0	293.7	8115	14006	17464	20702	27934	31008
<i>Kappa</i>	1269.2	567.2	5870	9903	14403	20724	47145	66793
<i>Wakeby</i>	1253.7	599.4	5975	10077	14517	20580	44616	61677
<i>San Francisco: nc = 10; u<sub>1</sub> = 717.2208; a<sub>1</sub> = 347.3444;</i>								
<i>u<sub>2</sub> = 2784.959; a<sub>2</sub> = 1363.924; p = 0.691369</i>								
DG2P	176.5	118.0	4065	5479	6472	7440	9653	10601
<i>Kappa</i>	209.8	186.3	3781	5169	6118	6982	8694	9321
<i>Wakeby</i>	248.3	150.8	3344	5034	6630	8568	14825	18521
<i>Huites: n = 52; nc = 13; u<sub>1</sub> = 1496.690; a<sub>1</sub> = 718.5692;</i>								
<i>u<sub>2</sub> = 6053.189; a<sub>2</sub> = 3252.307; p = 0.768750</i>								
DG2P	383.5	197.8	7907	11456	13868	16198	21489	23750
<i>Kappa</i>	798.0	405.4	6685	10547	14295	18942	34472	43939
<i>Wakeby</i>	818.9	425.9	6628	10458	14203	18881	34739	44533

### 3.3 Selección y ratificación de la FC

El procesamiento bivariado de los 33 datos de la tabla 1, condujo a los siguientes dos indicadores de asociación:  $\rho_n = 0.9108$  y  $\tau_n = 0.7576$ . Por otra parte, en la tabla 3 se muestran los estadísticos de ajuste que se obtuvieron al aplicar las FC de *Plackett* y de *Gumbel-Hougaard*. En las ecuaciones 9 a 11, las

probabilidades bivariadas empíricas se estimaron con la ecuación 8 y las teóricas con las expresiones 1 y 3. Con base en los resultados de la tabla 3, se adopta la FC de *Gumbel-Hougaard*, debido a que reporta el EME y EAM más reducidos y además reproduce la dependencia observada de  $\lambda_U^{CFG} = 0.8097$  (ecuación 14).

Tabla 3. Indicadores estadísticos del ajuste de las FC citadas en 33 crecientes anuales conjuntas de las estaciones Huites y San Francisco, México

Función Cópula:	$\theta$	EME	EAM	DP	DN	MDP	MDN	$\lambda_U$
<i>Plackett</i>	77.30	0.0206	0.0167	21	12	0.0469	-0.0284	0.0000
<i>Gumbel-Hougaard</i>	4.125	0.0194	0.0160	21	12	0.0456	-0.0283	0.8170

DP, DN número de diferencias positivas y negativas.  
MDP, MDN máxima diferencia positiva y negativa

En la tabla 4 se muestra una parte de las probabilidades de no excedencia bivariadas, empíricas observadas ( $w_i^0$ ) y teóricas calculadas ( $w_i^c$ )

con la FC de *Gumbel-Hougaard*. También se indican sombreadas las diferencias máximas positiva y negativa.

Tabla 4. Porción de las probabilidades de no excedencia conjuntas y sus diferencias, calculadas con la FC de *Gumbel-Hougaard*, para 33 crecientes de anuales de las estaciones Huites y San Francisco, México

No.	$w_i^o$	$w_i^c$	Diferencias	No.	$w_i^o$	$w_i^c$	Diferencias
1	0.5302	0.5183	0.0119	18	0.7717	0.7548	0.0169
3	0.8019	0.7566	0.0453	25	0.1981	0.2073	-0.0092
7	0.1679	0.1910	-0.0231	30	0.3490	0.3316	0.0174
13	0.0169	0.0452	-0.0283	33	0.8925	0.8958	-0.0033

El coeficiente de correlación ( $r_{xy}$ ) entre las 33 probabilidades empíricas y las teóricas, estimadas con la FC citada, resultó de 0.9983; por lo tanto, excelente. El contraste gráfico entre ambas probabilidades, se expone en la figura 1 para los datos completos de la tabla 4.

### 3.4 Gráficas del periodo de retorno bivariado $T'_{XY}$

Con base en la FC de *Gumbel-Hougaard* y la ecuación 16, se estimaron los periodos de retorno

bivariados de tipo AND para los cuatro periodos de retorno conjuntos de diseño definidos. De manera arbitraria se seleccionan gastos  $QX$  y se buscan por tanteos los  $QY$  que cumplen el  $T'(X,Y)$ , según sus probabilidades de no excedencia marginales (ecuaciones 23) y conjunta (ecuación 3). En la tabla 5 se muestran resultados obtenidos para definir las cuatro gráficas de la figura 2.

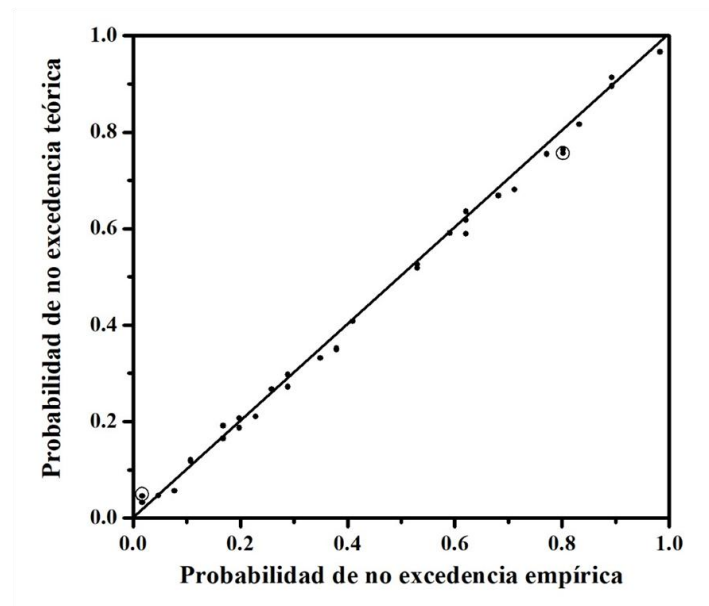


Figura 1. Contraste gráfico de probabilidades conjuntas calculadas con la FC de *Gumbel-Hougaard*, para 33 crecientes anuales de las estaciones Huites y San Francisco, México

### 3.5 Contraste de los eventos de diseño

En la figura 2, siguiendo las recomendaciones de Volpi y Fiori (2012), se obtienen como intervalos del gasto  $QX$  de diseño, para los periodos de retorno conjuntos de 50, 100, 500 y 1000 años, los siguientes: 14000 a 17100  $m^3/s$ , 17500 a 20400  $m^3/s$ ,

25000 a 27600  $m^3/s$  y 28500 a 30800  $m^3/s$ . De acuerdo a las predicciones univariadas de la estación Huites, expuestas en la tabla 2, se observa que todas ellas resultan menores al límite interior de los intervalos definidos en la figura 2.

Tabla 5. Parejas de gastos  $QX$  y  $QY$  anuales en  $m^3/s$  utilizadas para definir las gráficas del periodo de retorno conjunto tipo AND con la FC de *Gumbel-Hougaard*, en 33 crecientes anuales de las estaciones Huites y San Francisco, México

$T'_{XY} = 50$ años		$T'_{XY} = 100$ años		$T'_{XY} = 500$ años		$T'_{XY} = 1000$ años	
$QX$	$QY$	$QX$	$QY$	$QX$	$QY$	$QX$	$QY$
0	6472	0	7440	0	9653	0	10601
5000	6471	12000	7438	18000	9653	20000	10601
10000	6468	14000	7436	20000	9652	22000	10600
11000	6465	16000	7425	21000	9650	24000	10598
12000	6460	17000	7411	22000	9648	26000	10591
13000	6451	17500	7399	23000	9643	27000	10580
14000	6432	18000	7380	24000	9632	27500	10571
15000	6392	18500	7352	24500	9622	28000	10558
15500	6356	19000	7307	25000	9607	28500	10537
16000	6297	19200	7281	25200	9599	29000	10504
16500	6191	19400	7250	25400	9590	29200	10487
16750	6102	19600	7209	25600	9579	29400	10465
17000	5958	19800	7155	25800	9566	29600	10438
17100	5870	19900	7121	26000	9550	29800	10402
17200	5747	20000	7081	26200	9531	30000	10358
17300	5556	20100	7032	26400	9507	30100	10329
17400	5151	20200	6972	26600	9477	30200	10296
17425	4927	20300	6894	26800	9438	30300	10257
17450	4440	20400	6789	27000	9388	30400	10210
17464	0	20500	6632	27200	9319	30500	10152
		20550	6516	27400	9220	30600	10077
		20600	6348	27600	9057	30700	9977
		20650	6052	27700	8924	30800	9829
		20702	0	27800	8705	30900	9568
				27900	8133	30950	9308
				27934	0	31000	8449
						31008	0

### 3.6 Estimación de los eventos de diseño

Con base en la ecuación 19 de la distribución de Kendall bivariada, establecida para la FC de *Gumbel-Hougaard*, se buscó por tanteos el periodo de retorno univariado ( $Tr$ ) y su respectiva probabilidad de no excedencia ( $s$ ), que define un periodo de retorno

secundario igual al conjunto o bivariado de diseño. Encontrado tal valor de la variable unitaria ( $s$ ), se obtienen por tanteos los valores del  $QX$  con la ecuación 23 de la distribución marginal, que iguala tal valor de  $s$ . En la tabla 6 se exponen los resultados.

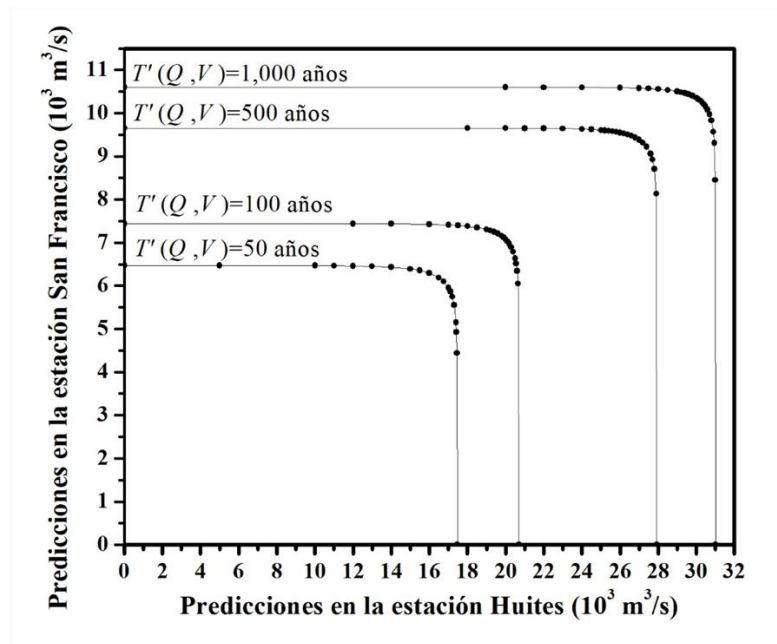


Figura 2. Gráficas de los cuatro periodos de retorno conjunto tipo AND de diseño obtenidas con la FC de Gumbel-Hougaard, para 33 crecientes anuales de las estaciones Huites y San Francisco, México

Tabla 6. Eventos de diseño obtenidos con el periodo de retorno secundario que iguala al univariado en las crecientes conjuntas de las estaciones Huites y San Francisco, México

$Tr$ univariado (años) seleccionado	Probabilidad ( $s$ ) del $Tr$ secundario	Valor obtenido por tanteos del $QX$ , $m^3/s$
10	0.870794	5444
25	0.947646	12536
50	0.973712	16138
100	0.986828	19429
500	0.997361	26700
1000	0.998680	29778

Se observa que los eventos diseño de la tabla 6, superan a las predicciones univariadas de la estación Huites de la tabla 2 y están ubicados dentro de los intervalos definidos en la figura 2, lo cual, les brinda confiabilidad. Cuando las predicciones obtenidas con el análisis de frecuencias bivariado, no son superiores a las predicciones univariadas, su importancia radica en permitir validar la tendencia o comportamiento de la relación gasto de la predicción contra el respectivo periodo de retorno conjunto.

#### 4. CONCLUSIONES

La ventaja fundamental del uso de las Funciones Cópula (FC) en los análisis de frecuencias de crecientes bivariados (AFCb), radica en construir fácilmente la distribución de probabilidades conjunta, con base en las distribuciones univariadas marginales adoptadas previamente y en la estimación de la asociación o correlación entre las variables aleatorias: gasto máximo base ( $QX$ ) y gasto máximo auxiliar ( $QY$ ) de las crecientes anuales simultáneas procesadas.

La aplicación de las FC en los AFCb ha mostrado que la selección de la Cópula idónea, se basa en reproducir la dependencia del extremo derecho observada; lo cual garantiza una estimación más

aproximada de las predicciones asociadas a los periodos de retorno conjuntos de diseño. Las *FC* que no muestran tal dependencia, como la de *Plackett*, se aplican a los gastos procesados de *QX* y *QY*, para contrastar y validar la calidad del ajuste logrado, con la *FC* seleccionada y probada (ver tabla 3).

El procesamiento de 33 crecientes anuales de *QX* y *QY* en las estaciones hidrométricas Huites y San Francisco, de la Región Hidrológica 10 (Sinaloa), México; permitió mostrar la sencillez del desarrollo numérico del AFCb propuesto y exponer las figuras 1

y 2 de resultados. Con base en la figura 2 se definieron los intervalos de predicciones del *QX*, cuyos valores estimados con el periodo de retorno secundario fueron expuestos en la tabla 6.

En la aplicación numérica descrita, las predicciones obtenidas con el AFCb resultaron ligeramente mayores que las estimadas con el registro completo de la estación de aforos Huites y por ello, son las adoptadas. En casos como el expuesto, el AFCb se considera un éxito, debido a que condujo a predicciones más severas o críticas.

## REFERENCIAS

- AghaKouchak, A., Sellars, S., & Sorooshian, S. (2013). Methods of tail dependence estimation. Chapter 6 (pp. 163–179). In: *Extremes in a Changing Climate*. AghaKouchak, A., Easterling, D., Hsu, K., Schubert, S., & Sorooshian, S. (Eds.). Springer. Dordrecht, The Netherlands. ISBN: 978–94–007–4478–3
- Aldama, A. A., Ramírez, A. I., Aparicio, J., Mejía-Zermeño, R., & Ortega-Gil, G. E. (2006). *Seguridad Hidrológica de las Presas en México*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Jiutepec, Morelos, México. ISBN: 968–5536–75–9
- Barbe, P., Genest, C., Ghouli, K., & Rémillard, B. (1996). On Kendall's Process. *Journal of Multivariate Analysis*, 58(2), 197–229.
- Campos-Aranda, D. F. (1989). Estimación de los parámetros óptimos de la distribución Gumbel mixta por medio del algoritmo de Rosenbrock. *Ingeniería Hidráulica en México*, enero–abril, 9–18.
- Campos-Aranda, D. F. (2003). *Introducción a los Métodos Numéricos: Software en Basic y aplicaciones en Hidrología Superficial*. Capítulo 9: Optimización Numérica (pp. 172–211). Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P., México. ISBN: 970–705–019–5
- Campos-Aranda, D. F. (2023). Selección y aplicación de Funciones Cópula con dependencia en su extremo derecho al Análisis de Frecuencias Conjunto (Q,V) de Crecientes Anuales. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 14(5), en prensa. doi: 10.24850/j-tyca-14-5-3
- Capéraà, P., Fougères, A. L., & Genest, C. (1997). A nonparametric estimation procedure for bivariate extreme value copulas. *Biometrika*, 84(3), 567–577. doi: 10.1093/biomet/84.3.567
- Chen, L. & Guo, S. (2019). *Copulas and its application in Hydrology and Water Resources*. Chapter 2: Copula theory, pp. 13–38 and Chapter 3: Copula-based Flood Frequency Analysis, pp. 39–71. Springer. Gateway East, Singapore. ISBN: 978–981–13–4454–1
- Chowdhary, H. & Singh, V. P. (2019). Multivariate Frequency Distributions in Hydrology, Chapter 11, pp. 407–489. In: Teegavarapu, R. S. V., Salas, J. D., & Stedinger, J. R. (eds.). *Statistical Analysis of Hydrologic Variables* American Society of Civil Engineers. Reston, Virginia, U.S.A. ISBN: 978–0–7844–1517–7
- Escalante-Sandoval, C. A. & Raynal-Villaseñor, J. A. (1994). A trivariate Extreme Value distribution applied to flood frequency analysis. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 99(4), 369–375.
- Escalante-Sandoval, C. & Raynal-Villaseñor, J. (2008). Trivariate generalized extreme value distribution in flood frequency analysis. *Hydrological Sciences Journal*, 53(3), 550–567. doi: 10.1623/hysj.53.3.550
- Frahm, G., Junker, M., & Schmidt, R. (2005). Estimating the tail-dependence coefficient: Properties and pitfalls. *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(1), 80–100. doi: 10.1016/j-insmatheco.2005.05.008

- Goel, N. K., Seth, S. M. & Chandra, S. (1998). Multivariate modeling of flood flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(2), 146–155. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1998)124:2(146)
- González-Villarreal, F. J. (1970). Contribución al análisis de frecuencias de valores extremos de los gastos máximos en un río. *Series del Instituto de Ingeniería de la UNAM*, No. 277. México, D. F. 24 páginas.
- Gräler, B., van den Berg, M. J., Vandenberghe, S., Petroselli, A., Grimaldi, S., De Baets, B., & Verhoest, N. E. C. (2013). Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(4), 1281–1296. doi: 10.5194/hess-17-1281-2013
- Hosking, J. R. M. & Wallis, J. R. (1997). *Regional Frequency Analysis. An Approach Based on L-moments. Appendix: L-moments for some specific distributions*, pp. 191–209. Cambridge University Press. Cambridge, England. ISBN: 978-0-521-01940-8
- IMTA (2003). Banco Nacional de Datos de Aguas Superficiales (BANDAS). 8 CD's. Comisión Nacional del Agua-Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales-Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA). Jiutepec, Morelos, México.
- Kite, G. W. (1977). *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Chapter 8: Type I extreme distribution (pp. 87–104) and Chapter 12: Comparison of frequency distributions (pp. 156–168). Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, U.S.A. ISBN: 0-918334-23-3
- Meylan, P., Favre, A. C. & Musy, A. (2012). *Predictive Hydrology. A Frequency Analysis Approach*. Chapter 3: Selecting and checking data series (pp. 29–70) and Theme 9.2: Multivariate Frequency analysis using Copulas (pp. 164–176). CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. ISBN: 978-1-57808-747-1
- Molina-Aguilar, J. P., Gutiérrez-López, M. A., & Aparicio-Mijares, F. J. (2018). Búsqueda armónica para optimizar la función Gumbel mixta univariada. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 9(5), 280–322. doi: 10.24850/j-tyca-2018-05-11
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Chapter 4: Archimedean Copulas (pp. 109–155). Springer Series in Statistics. New York, U.S.A. Second Edition. ISBN: 978-0387-28659-4
- Poulin, A., Huard, D., Favre, A. C., & Pugin, S. (2007). Importance of tail dependence in bivariate frequency analysis. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 394–403. doi: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(394)
- Rao, A. R., & Hamed, K. H. (2000). *Flood Frequency Analysis*. Theme 1.8: Tests on hydrologic data (pp. 12–21) and Theme 7.2: The Extreme Value type I EV(1) distribution (pp. 229–241). CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. ISBN: 0-412-55280-9
- Requena, A. I., Mediero, L. & Garrote, L. (2013). A bivariate return period based on copulas for hydrologic dam design: accounting for reservoir routing in risk estimation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(8), 3023–3038. doi: 10.5194/hess-17-3023-2013
- Rossi, F., Fiorentino, M., & Versace, P. (1984). Two-component extreme value distribution for flood frequency analysis. *Water Resources Research*, 20(7), 847–856. doi: 10.1029/WR020i007p00847
- Salvadori, G., & De Michele, C. (2004). Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events. *Water Resources Research*, 40(W12511), 1–17. doi: 10.1029/2004WR003133
- Salvadori, G., De Michele, C., Kottegoda, N. T. & Rosso, R. (2007). *Extremes in Nature. An approach using Copulas*. Chapter 3: Bivariate analysis via Copulas, pp. 131–175 and Appendix C: Families of Copulas, pp. 233–269. Springer. Dordrecht, The Netherlands. ISBN: 978-1-4020-4414-4.
- Volpi, E. & Fiori, A. (2012). Design event selection in bivariate hydrological frequency analysis. *Hydrological Sciences Journal*, 57(8), 1506–1515. doi: 10.1080/02626667.2012.726357
- Yue, S., Ouarda, T. B. M. J., Bobée, B., Legendre, P., & Bruneau, P. (1999). The Gumbel mixed model for flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*, 226(1–2), 88–100. doi: 10.1016/S0022-1694(99)00168-7

Zhang, L. & Singh, V. P. (2019). Copulas and their Applications in Water Resources Engineering. Chapter 3: Copulas and their properties, pp. 62–122 and Chapter 4: Symmetric Archimedean Copulas, pp. 123–171. Cambridge University Press. Cambridge, United Kingdom. ISBN: 978–1–108–47425–2

---

*Las denominaciones que se emplean en esta publicación y la presentación de los datos que en ella figuran no suponen por parte de la UNESCO la adopción de postura alguna en lo que se refiere al estatuto jurídico de los países, territorios, ciudades o zonas, o de sus autoridades, ni en cuanto a sus fronteras o límites. Las ideas y opiniones expresadas en esta publicación son las de los autores y no representan, necesariamente, el punto de vista de la UNESCO, y no comprometen a la Organización.*

---



Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International  
CC BY-NC-SA 4.0 license