

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO EN RÍOS EN GEOMETRÍA COMPLEJA CON TRANSPORTE DE SEDIMENTO Y CONTAMINANTES BASADO EN LAS ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS. NUMERICAL SIMULATION OF RIVER FLOWS IN COMPLEX GEOMETRY BASED IN THE SHALLOW WATER EQUATIONS WITH SEDIMENT AND POLLUTANTS TRANSPORT

Martín Salinas-Vázquez¹, William Vicente, Hugo Mendoza, Jesús Gracia, Eliseo Carrizosa, Rafael Val, Javier Osnaya, Arturo Palacio y Alejandro Rodríguez

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo numérico basado en la resolución de las ecuaciones de aguas someras que permite el estudio de flujos en geometrías complejas. Se utiliza un esquema de discretización de la familia MacCormack, el cual ha mostrado su eficiencia en la resolución de las ecuaciones de Euler para flujos compresibles. Esta familia de esquemas tiene la ventaja de permitir el estudio de discontinuidades en la superficie libre de flujo guardando la conservación de las variables. Debido a que pertenece a un grupo amplio de esquemas, es posible el incremento del orden del mismo con un mínimo de cambios en el código base. Las ecuaciones de Aguas Someras se resuelven en coordenadas curvilíneas generalizadas, con la posibilidad de integrar un estudio integral del transporte de sedimento y contaminantes. A partir del método de fronteras inmersas, es posible estudiar flujos con cuerpos sólidos internos e inundaciones de zonas secas. En el presente trabajo se presentan resultados obtenidos en diferentes ríos del estado mexicano de Tabasco.

Palabras clave: Aguas someras, simulación numérica, ríos, MacCormack, flujo.

Abstract

A numerical model based on shallow water equations which allows the analysis of complex geometries flows is here presented. To promote the efficient solution of Euler Equations for compressible flows, a MacCormack discretization scheme is applied, the main reason being the advantage that these kind of schemes offer to study the free surface flow discontinuities keeping the variable conservation. Also, the increase in the order of the scheme with a minimum of changes in the base code is another advantage which becomes possible due to the belonging of this particular scheme to a wider family of schemes. The shallow water equations are solved using generalized curvilinear coordinates, with the possibility to achieve an integral study which considers both the transport of sediment and pollutants. The analysis of flows taking into account internal solid objects and floods of dry zones is feasible due to the Immerse Interface Method. Results about river flows in the Mexican State of Tabasco are here presented and analyzed.

Key words: Shallow water, CFD, rivers, MacCormack, flow.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de aguas someras se obtienen a partir de una serie de simplificaciones en las ecuaciones de Navier-Stokes (Wu, 2007). Estas ecuaciones describen el comportamiento de un fluido en zonas poco profundas, ya sea en costas o en cuerpos de agua (e.g. ríos y lagos). A pesar de las hipótesis empleadas, los resultados obtenidos de la solución de estas ecuaciones, han mostrado una buena aproximación con los datos experimental. Así también, estas ecuaciones siguen sin tener solución analítica, por lo que la solución numérica es la única alternativa viable.

Debido a la similitud matemática de las ecuaciones de aguas someras (EAS) y las ecuaciones de Euler, el uso de esquemas numéricos para resolver flujos compresibles se ha generalizado en la resolución de las EAS. Por otro lado, el uso más frecuente de los elementos y volúmenes finitos ha permitido el estu-

dio de flujos en geometrías más complejas (Hervout, 2007)

A pesar del fácil uso de geometrías complejas, el consumo de tiempo máquina, así como de memoria puede resultar grandes, e incluyendo problemas de convergencia. Además, no todos los esquemas numéricos que resuelven las EAS son capaces de mantener la conservación de las variables resultas. Esto se hace más crítico cuando se pretenden estudiar choques (shocks) en superficies libres. Estos choques son discontinuidades en las variables del flujo, producidas por la misma dinámica del flujo (números de Froude mayores a 1) o problemas muy específicos como la inundación de zonas secas, así como el rompimiento de una presa.

En flujos compresibles se ha comprobado que existen dos tipos de esquemas, que guardando la conservación de las variables, permiten el estudio de los choques (en este caso choques sónicos). Los prime-

¹ Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México Ciudad Universitaria 04510, México D.F., México
msalinasv@ii.unam.mx,

ros resuelven el problema de Riemann en la interface del choque y los segundos son una combinación de métodos de diferente orden que permiten un cierto alisamiento de la discontinuidad (Laney, 1998)

La familia de esquemas del tipo MacCormack está en la segunda clasificación. En general son esquemas con dos sub-espacios de tiempo, corrector-predictor, que le permiten un segundo orden en el tiempo. El esquema base, creado por MacCormack (Fletcher, 1988) es de orden dos en tiempo y espacio. A pesar de que se ha observado que es capaz de manejar choques sónicos (números de Mach cerca de la unidad), comúnmente se le agrega un paso TVD (Total variation diminishing) que le permite el estudio de flujos con choques más intensos (Toro, 2001)

Otras ventajas de esta familia de esquemas, son las siguientes: sencillos de codificar; permiten el uso de geometrías curvilíneas, son relativamente poco consumidores tanto de tiempo como de memoria y es una familia muy amplia de esquemas. Esta última cualidad es de gran importancia, pues permite el incremento en el orden del esquema con pocas modificaciones en el código base. Así se puede pasar a órdenes de hasta 4 o 6 en tiempo, más de 8 en espacio y sobre todo permite la utilización de esquemas compactos que son mucho más eficientes que las tradicionales diferencias finitas. Por lo anterior el presente trabajo está basado en el esquema base de MacCormack (orden dos en espacio y tiempo) con las modificaciones propuestas por Liang et al. (Liang et al., 2007).

Para representar la geometría compleja, las ecuaciones de aguas someras son resueltas en coordenadas curvilíneas junto con un método de fronteras inmersas. Igualmente, se plantea la posibilidad de integrar un modelo de transporte de sedimentos y contaminantes.

ECUACIONES DE GOBIERNO

Según Liang et al. (Liang et al., 2007), las ecuaciones de aguas someras se pueden escribir de la siguiente

$$\partial\eta\partial t+\partial q_x\partial x+\partial q_y\partial y=0 \quad (1)$$

$$\partial q_x\partial t+\partial\beta q_x^2H+g\eta^2+g\eta\partial x+\partial\beta q_xq_yH\partial y=-g\eta\partial h\partial x-gq_xq_x^2+q_y^2H^2C^2+T.T_X \quad (2)$$

$$\partial q_y\partial t+\partial\beta q_xq_yH\partial x+\partial\beta q_y^2H+g\eta^2+g\eta\partial y=-g\eta\partial h\partial y-gq_yq_x^2+q_y^2H^2C^2+T.T_Y \quad (3)$$

donde t es el tiempo, η es la elevación de la superficie libre sobre un valor de referencia, q_x y q_y son los gastos por unidad de ancho en cada dirección, β es el factor de corrección para flujos no uniformes en la vertical ($\beta=1.016$), H es la altura de la superficie libre total ($H=h+\eta$, ver Figura 1), g la aceleración de la gravedad, y C es el coeficiente de Chezy.

El último término de la derecha en ambas ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento (ecuaciones (2) y (3)) son los términos turbulentos viscosos, los cuales son dados por (Wu, 2007):

$$T.T_Y=\partial\partial x^2v_tH\partial u\partial x+\partial\partial yv_tH\partial u\partial y+\partial v\partial x \quad (4)$$

$$T.T_X=\partial\partial y^2v_tH\partial v\partial y+\partial\partial xv_tH\partial u\partial y+\partial v\partial x \quad (5)$$

donde v_t es la viscosidad turbulenta, obtenida a partir del modelo $k-\epsilon$ para flujos en aguas someras, u y v son las velocidades en las direcciones x y y , obtenidas como: q_x/H y q_y/H respectivamente.

El sedimento suspendido se modela a partir de la ecuación de conservación para un escalar pasivo (Wu, 2007). Por el momento el peso del sedimento no afecta el comportamiento del flujo (Cao & Pender, 2004):

$$\partial Hc\partial t+\partial q_xc\partial x+\partial q_yc\partial y=\partial\partial xD_tH\partial c\partial x+\partial\partial yD_tH\partial c\partial y+S_c \quad (6)$$

donde c es la concentración de sedimento suspendido en el agua y D_t es el coeficiente de difusión turbulenta, relacionado a partir de un número de Schmith con la viscosidad turbulenta. El término S_c , comprende los términos fuente en la interface entre la zona del

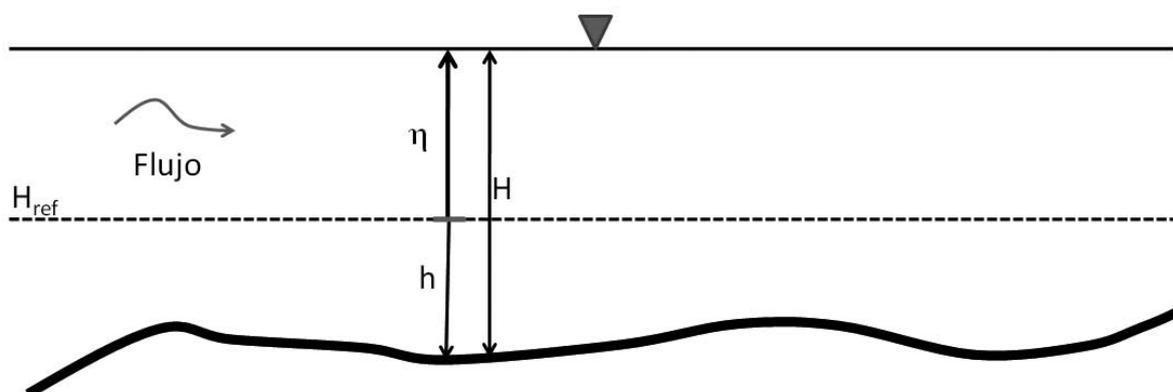


Figura 1. Configuración del flujo en aguas someras.

lecho del río y la del flujo de agua en movimiento (sedimentación/erosión). Ambos términos serán obtenidos a partir de ecuaciones empíricas (Chanson, 2004; Van Rijn, 1993). A partir de esta consideración, la altura del piso cambiará de acuerdo a:

$$1-p\partial h\partial t=-Sc \quad (7)$$

donde p es la porosidad del sedimento. De igual forma, el transporte de sedimento por arrastre de fondo (q_b), puede ser obtenido a partir de alguna fórmula empírica para cada punto de la malla computacional (Chanson, 2004; Van Rijn, 1993). En este trabajo se ha utilizado la ecuación de Meyer-Peter & Muller, dada por:

$$q_{bi}G-1gd^3=sgnu8(\tau^*-0.047)^{3/2} \quad (8)$$

donde G es la relación entre las densidades del sedimento y del agua, d es el tamaño medio de los granos del sedimento y τ_c el esfuerzo cortante en el piso. La función $sgn(u)$ proporciona la dirección y la magnitud relativa de cada componente de un vector. A partir de conocer los flujos de sedimento por arrastre de piso por unidad de ancho en cada celda y en cada dirección, se tiene que (Cao, 2004):

$$1-p\partial h\partial t+\partial q_{bx}\partial x+\partial q_{by}\partial y=0 \quad (9)$$

donde q_{bx} se obtiene con $sgn(u)$ y q_{by} con $sgn(v)$. Las ecuaciones (7) y (9) se pueden combinar para generar una sola.

El transporte de contaminantes, igualmente se puede realizar a partir de una ecuación de transporte de un escalar pasivo, con sus adecuados coeficientes de difusión y términos fuente (Wu, 2007).

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Esquema numérico

Se basa en el esquema explícito MacCormack de orden 2 en tiempo y espacio. Este método consiste en dos sub-pasos de tiempo (esquema Runge-Kutta de segundo orden), predictor-corrector, donde la dirección de las derivadas de primer orden se cambia en cada uno de los sub-pasos. Esto genera un esquema global de segundo orden en el espacio (Liang et al., 2007).

En forma matricial las ecuaciones (1) a (3), se pueden representar de la siguiente forma:

$$\partial U\partial t+\partial F\partial x+\partial G\partial y=S \quad (10)$$

donde U es el vector:

$$U=(\eta, q_x, q_y)^T \quad (11)$$

De la ecuación (10) F y G son los flujos en las direcciones x y y respectivamente:

$$F=q_x\beta q_x^2H+g\eta^2+gh\eta\beta q_xq_yH; \\ G=q_y\beta q_y^2H+g\eta^2+gh\eta \quad (12)$$

donde S es el término fuente que engloba todos los términos restantes de las ecuaciones (1) a (3). El esquema en una dimensión queda como:

$$U_{i+1/2}=U_{in}-\Delta t\Delta xF_{in}-F_{i-1n}+\Delta tS_{in} \\ U_{i+1}=1/2(U_{in}+U_{i+1/2})-\Delta t\Delta xF_{i+1n}+1/2- \\ F_{i+1/2}+\Delta tS_{i+1/2}+TVDi \quad (13)$$

Este esquema es rápidamente escalable, con un mínimo de cambios en el código base, a esquemas de la familia MacCormack de orden mayor, como el esquema de orden 2 en tiempo y 4 en espacio (Gottlieb & Turkel, 1976) o los esquemas semi-compactos (Kennedy & Carpenter, 1997).

Para flujos con pendiente suave o números de Froude pequeños, este esquema es más que suficiente para modelar el flujo. Sin embargo, si el flujo presenta cambios de sección transversal abruptos, zonas secas, cambios importantes de la altura de la superficie libre o número de Froude mayores a uno, es necesario el uso del término TVD, ecuación (13). El término TVD usado, utiliza 5 puntos centrados y sólo es usado en el segundo sub-paso, corrector (Liang et al., 2007). Este término tiene la siguiente forma:

$$TVDi=G_{i+1}G_{i-1}\Delta U_{i+1/2n}-G_{i-1}G_{i-1}\Delta U_{i-1/2n} \quad (14)$$

$$\Delta U_{i+1/2n}=U_{i+1n}-U_{in}; \\ \Delta U_{i-1/2n}=U_{in}-U_{i-1n} \quad (15)$$

$$r_i+=\Delta\eta_{i-1}2n\cdot\Delta\eta_{i+1}2n+\Delta q_{xi-1}2n\cdot\Delta q_{xi+1}2n+\Delta q_{yi-1}2n\cdot\Delta q_{yi+1}2n \\ \Delta\eta_{i+1}2n\cdot\Delta\eta_{i-1}2n+\Delta q_{xi+1}2n\cdot\Delta q_{xi-1}2n+\Delta q_{yi+1}2n\cdot\Delta q_{yi-1}2n \quad (16)$$

$$r_i-=\Delta\eta_{i-1}2n\cdot\Delta\eta_{i+1}2n+\Delta q_{xi-1}2n\cdot\Delta q_{xi+1}2n+\Delta q_{yi-1}2n\cdot\Delta q_{yi+1}2n \\ \Delta\eta_{i+1}2n\cdot\Delta\eta_{i-1}2n+\Delta q_{xi+1}2n\cdot\Delta q_{xi-1}2n+\Delta q_{yi+1}2n\cdot\Delta q_{yi-1}2n \quad (17)$$

La función $G()$ de la ecuación (14) está dada por:

$$G_x=0.5C\partial x \quad (18)$$

$$\partial x=\max(0, \min(2x, 1)) \quad (19)$$

$$C=Cr-1-Cr, \quad Cr\leq 0.5, 0.25 \quad Cr>0.5 \quad (20)$$

En la ecuación (20) Cr es el número de Courant local:

$$Cr=u+gH\Delta t\Delta x \quad (21)$$

Coordenada curvilíneas generalizadas

Con el fin de permitir el uso de geometrías complejas, se utilizan coordenadas curvilíneas generalizadas. Esto significa que las regiones con celdas deformadas en el espacio físico son mapeadas a un espacio cúbico con celdas regulares en donde las EAS son resueltas numéricamente (Figura 2). Los resultados son devueltos al espacio físico a través de un mapeo inverso. La función de mapeo es una matriz Jacobiana de transformación. Los términos de esta matriz se obtienen con los mismos esquemas usados para las derivadas del esquema MacCormack (Fletcher, 1988).

Zona seca y modelación de obstáculos.

Si bien el presente modelo permite la utilización de coordenadas curvilíneas generalizadas, y por lo tanto geometrías complejas. En algunas ocasiones

se pueden presentar zonas donde la distorsión de la malla produce la formación de inestabilidades. Igualmente se pueden presentar obstrucciones dentro del flujo (i.e. islas y pilotes) o se quiera estudiar la inundación de zonas secas. Para tal motivo se ha hecho una extrapolación de un método llamado "fronteras inmersas" (de la Lama, 2009), utilizado en

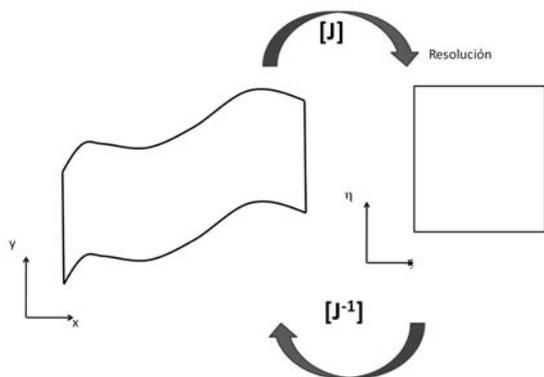


Figura 2. Coordenadas curvilíneas generalizadas.

la dinámica de gases. Este método, permite diferenciar una zona "húmeda", donde el agua fluye, de una zona "seca", donde no hay agua. La diferenciación se obtiene a partir de una bandera que vale 1 para zonas húmedas y 0 para zonas secas. Cuando una celda tiene valor de bandera 0, las ecuaciones no se resuelven en ésta y se impide el flujo de agua de una zona húmeda a una zona seca.

En el caso de obstrucciones como pilotes o islas, que permanecen en todo el transcurso de la simulación, ningún cambio en la distribución de las banderas se tiene que realizar. Sin embargo, en el caso de inundaciones de zonas secas o del secado de zonas húmedas, la distribución de las banderas debe de ser dinámica y modificarse continuamente.

En estos casos, la zona seca se diferencia de una húmeda si la elevación de la superficie libre es menor (o mayor) a un altura de referencia:

$$H_i \geq H_{crit}; \text{ Zona Húmeda} \\ H_i < H_{crit}; \text{ Zona Seca} \quad (22)$$

Cuando la elevación de la superficie libre del agua en una celda, H_i , es inferior a H_{crit} , automáticamente la bandera toma el valor de cero. Cuando una celda adyacente a otra con bandera cero tenga dos veces el valor de H_{crit} , ambas celdas toman el valor de H_{crit} y la bandera igual a uno. El procedimiento anterior asegura la conservación de masa.

Una forma de evitar el comportamiento escalonado del flujo debido a la obstrucción de ciertas celdas, ver Figura 3, es a partir de la utilización de interpolaciones de diferentes órdenes que evitan este comportamiento (de la Lama, 2009).

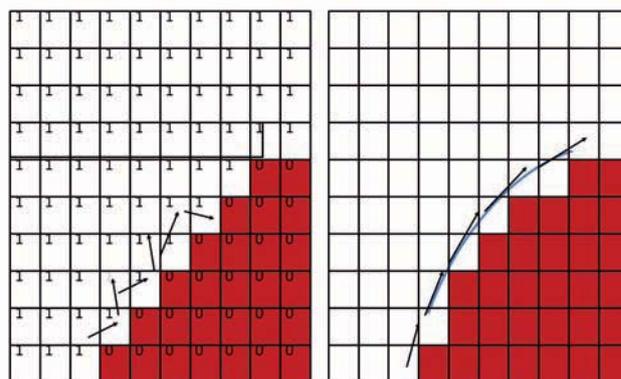


Figura 3. Fronteras inmersas y la formación de un comportamiento escalonado (izquierda). Utilización de interpolaciones (derecha).

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se basan en convertir un problema de Riemann bi-dimensional en un problema de Riemann uni-dimensional equivalente en la frontera. Esto se obtiene a partir de la teoría de bi-características en las fronteras al desarrollar un promediado lineal a lo largo de la interface. A partir de aquí se permite construir condiciones de frontera subcríticas y supercríticas. Para el presente trabajo se consideró una entrada subcrítica, en la cual se fijan los gastos en ambas direcciones, teniendo que calcular la altura de la superficie libre. Igualmente se consideró una salida subcrítica, donde se fija la altura de la superficie libre o el gasto longitudinal, calculando a partir de las relaciones de condiciones de frontera el resto de las variables (Guinot, 2003).

Planteamiento de problema

Como parte del estudio hídrico del estado de Tabasco, se han desarrollado diversos estudios tanto experimentales como numéricos. Una parte fundamental en el estudio, debido a su complejidad, es el desarrollo de herramientas numéricas que permitan un estudio detallado del flujo del río. Diferentes herramientas se han desarrollado, entre las cuales la presente.

Cerca de la capital del estado de Tabasco, Villahermosa, el río Mezcalapa se bifurca en dos ramas, río Samaria y Carrizal. Cuando el gasto en el río Carrizal supera el crítico, produce inundaciones catastróficas en la ciudad. Con el fin de controlar el gasto de las dos ramas, se han desarrollado diferentes proyectos basados en la creación de obras de control. Sin embargo, es de suma importancia el estudio del flujo, no sólo cerca de estas obras, sino tanto aguas arriba como aguas abajo (Jiménez et al., 2007). En la Figura 4 se observa una fotografía satelital de la zona a estudiar, junto a la batimetría del río.

DETALLES NUMÉRICOS

El dominio computacional tiene un tamaño de $L_y=6.1\text{km}$ de ancho (dirección y) por $L_x=6.8\text{km}$ (dirección x) de largo y comprende la zona de la bifurcación. El dominio está constituido por 500 nodos



en la dirección x y 750 nodos en la dirección y . El tamaño de las celdas en todo el dominio computacional es homogéneo.

A partir de la topografía y batimetría del lugar, la forma del río se fue aproximando a polinomios de orden

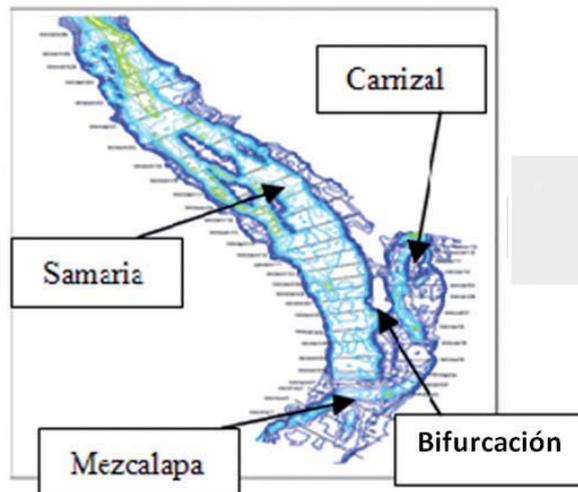


Figura 4. Zona de estudio.

superior, con el fin de ir dibujándola sobre la malla. Con este procedimiento se pudieron aproximar muy bien la geometría real y computacional del río. La figura 5 muestra el procedimiento seguido.

El cálculo es inicializado con una velocidad longitudinal promedio, obtenida en función del gasto, $u_0=0.9496\text{ m/s}$ y $v_0=0.0\text{ m/s}$, y la altura de la superficie libre promedios. El flujo entra por la parte izquierda del dominio con un gasto conocido de $3300\text{ m}^3/\text{s}$, mientras que sale por la parte izquierda con alturas de la superficie libre conocida de $H=6.0\text{ m}$.

El consumo de memoria RAM para el presente caso es de $\approx 400\text{MB}$ y el tiempo de cálculo es de ≈ 9.6 horas para cada hora de simulación real del río.

RESULTADOS NUMÉRICOS.

Diferentes pruebas de flujos sencillos en canales con topes, contracciones y obstrucciones, así como el del rompimiento de presas, transporte y reflexión de ondas e inundaciones se han realizado para validar el buen funcionamiento del código. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos para la geometría antes descrita de la bifurcación del río Mezcalapa.

En la Figura 6 se muestran los contornos de las banderas para diferenciar la zona mojada de la zona seca. De esta figura se observa que el método descrito anteriormente trabaja correctamente, pues los valores de bandera rojos ($=1$) se encuentran todos en la zona alta de la superficie, lo que indica que solo en estos nodos el agua fluye. Fuera de esta zona (bandera=0, zona azul), la resolución de las ecuaciones se congela no permitiendo su evolución. La altura de la superficie en la dirección z es proporci-

onal con la altura de la superficie libre del agua (este valor fue multiplicado por un factor de 1000.0). A partir de este escalamiento, se pueden observar las ondas en la superficie libre, creadas por la topografía del lugar. Cabe destacar la reflexión de estas ondas en la bifurcación, así como en ambas márgenes del río Samaria. La Figura 6b, muestra los vectores de velocidad en la entrada del dominio computacional, hasta la bifurcación. De esta figura, cabe destacar, que no existe flujo de agua de la zona mojada a la seca.

En la figura 7 se muestra el contorno de la magnitud de la velocidad ($u=u^2+v^2$), donde se observa las zonas de mayor velocidad, principalmente en las zonas de estrangulamiento y en la salida del río Carrizal, donde su ancho se reduce drásticamente. Dos zonas interesantes estas remarcadas en esta figura, la primera donde el ancho del río Mezcala se reduce, aumentando la velocidad del flujo, este aumento produce una zona de recirculación en el margen derecha del río, en un ensanchamiento abrupto. Estas zonas de alta/baja velocidad son de suma importancia, pues son zonas propensas a tener una evolución importante del lecho, ya sea por erosión o deposición.

En la zona de la bifurcación se ha comprobado que el gasto que se va por la rama del río carrizal es de 39.8% , valor alto, pues experimentalmente se ha visto que este valor es de 33% . Esto debido a que en esta simulación no se tomaron en cuenta las islas dentro del río, que permite el libre tránsito hacia los ríos, cosa que no sucede por la parcial obstrucción de la entrada del río Carrizal (ver Figura 4). En un estudio tridimensional del flujo (Sanchez et al., 2009), se observó que la cantidad de agua que fluía por el río

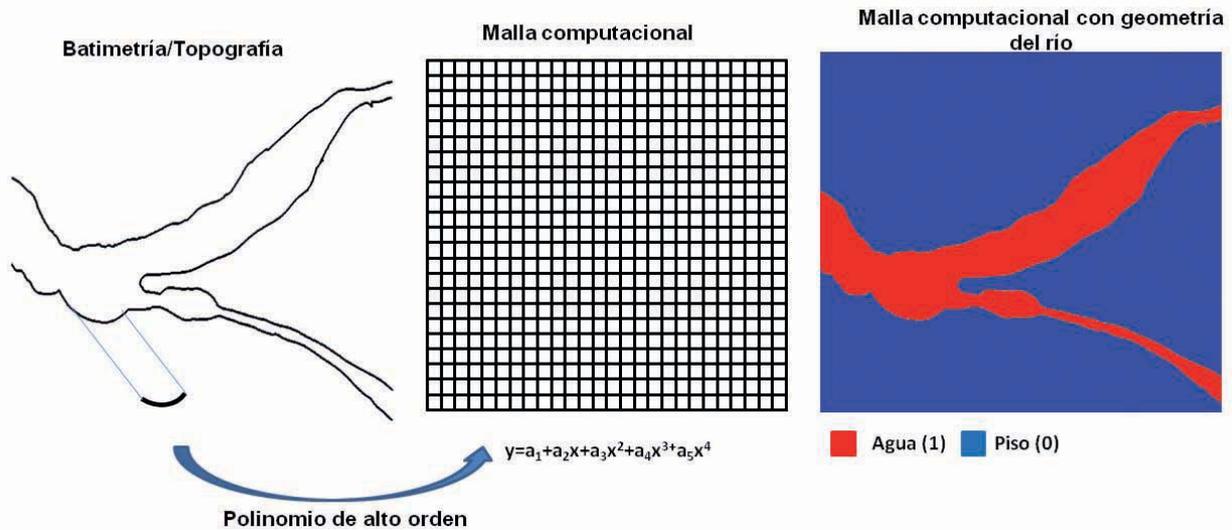


Figura 5. Generación de la malla computacional y grabado de la forma del río a partir de transformar la batimetría en polinomios de alto orden.

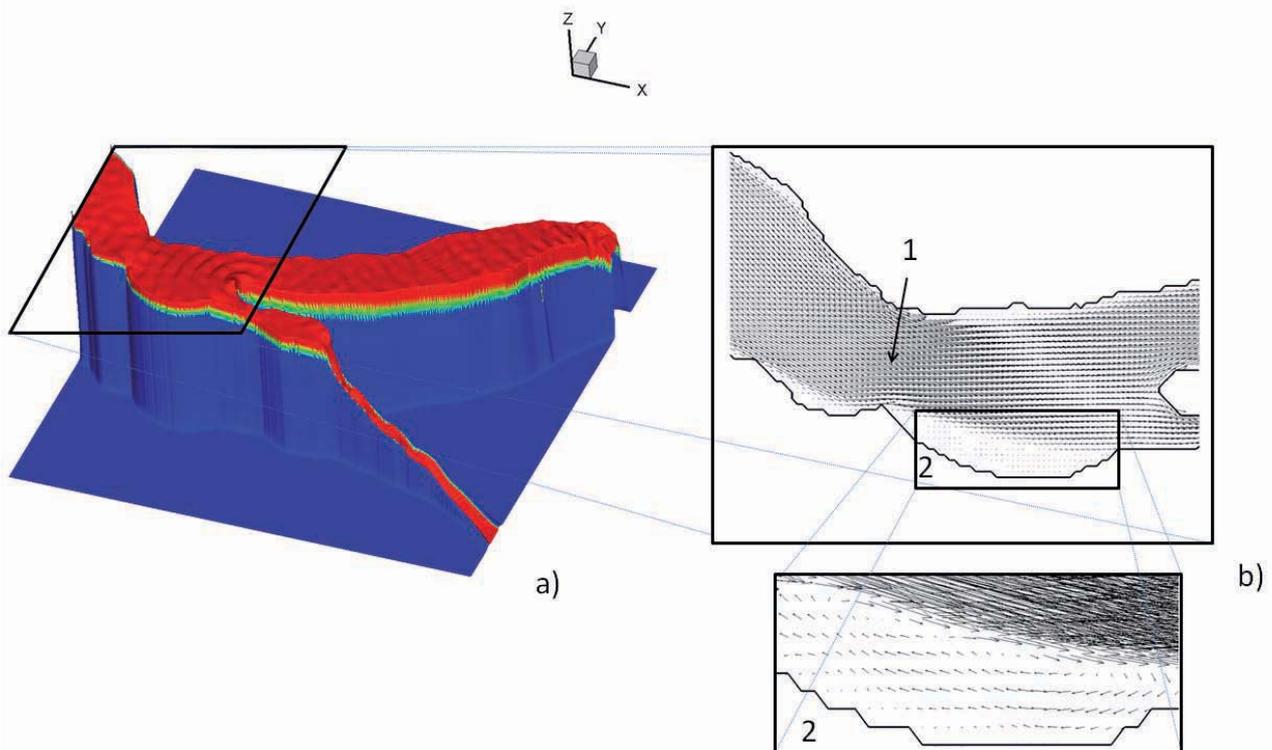


Figura 6. a) Contorno del valor de la bandera que indica las zonas secas y mojadas.
b) Campos de velocidad en una sección del río.

Carrizal era de 27%. En simulaciones recientes, con este modelo bidimensional, se está considerando las islas, que han sido creadas igualmente a partir de la aproximación de su forma por polinomios de alto orden.

Comparando los resultados obtenidos en el modelo tridimensional (Sánchez et al., 2009) y el presente modelo bidimensional, se puede ver que la magnitud de las velocidades son similares y en general el patrón del flujo es similar (Figura 8). Cabe destacar que

las principales diferencias se obtienen en las zonas influenciadas por las islas, marcadas con número en esta figura. En el punto 1 la simulación tridimensional muestra valores más altos de velocidad debido a una isla en la margen derecha del río que obstruye aun más el cauce de éste. En la zona 2 sucede lo contrario, debido a la gran isla que se forma aguas debajo de la bifurcación, el gasto que entra al río carrizal es menor que en la simulación bidimensional. Al ser menor el gasto, por consecuencia, igualmente las velocidades máximas en este río son menores.

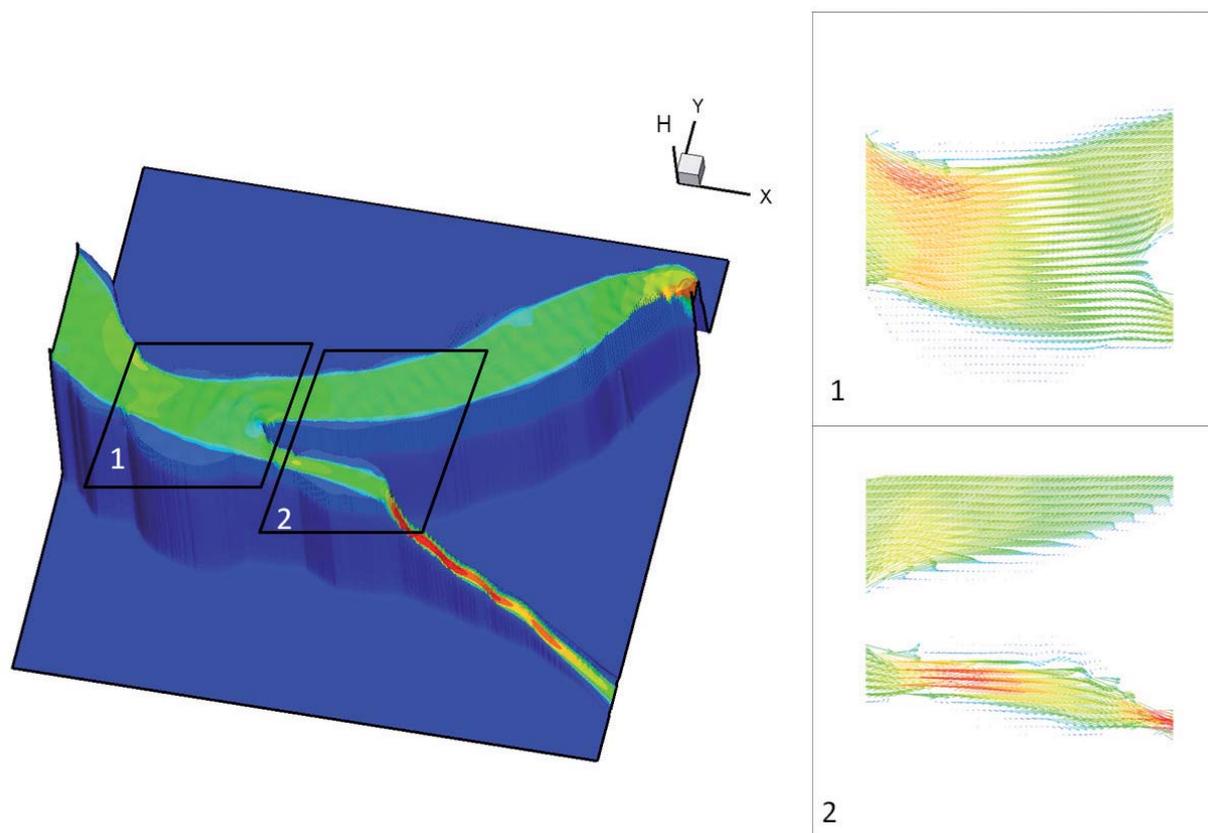


Figura 7. Contorno de la magnitud de la velocidad y vectores de velocidad en dos secciones del río.

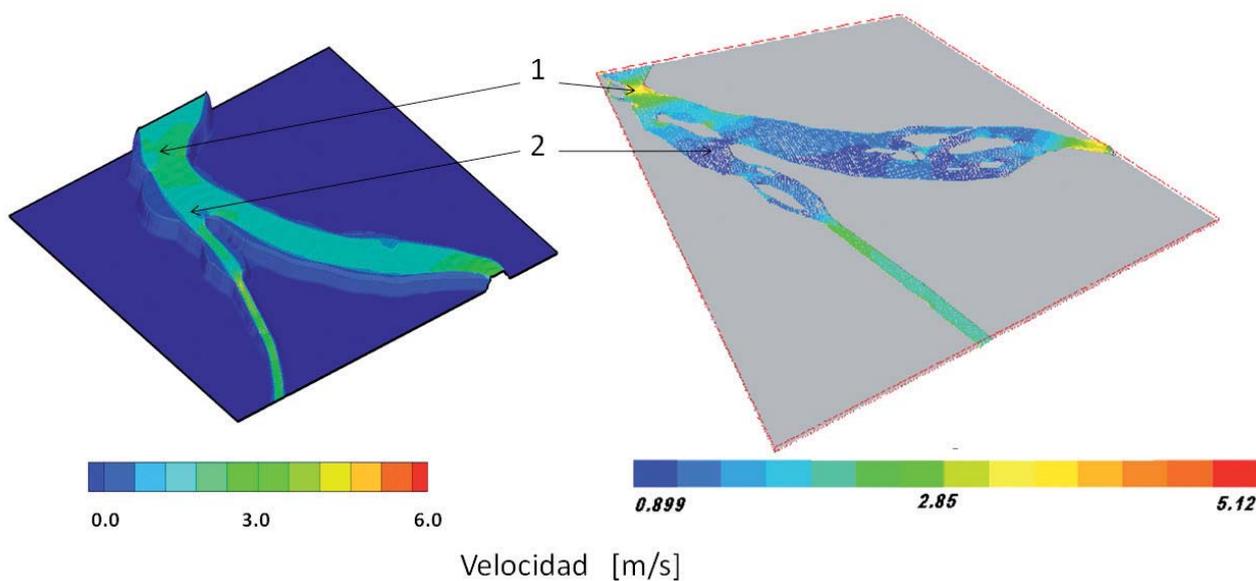


Figura 8. Comparación de velocidades entre el modelo presente (izquierdo) y un modelo tridimensional (Sánchez, 2009) (derecho).

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presenta un modelo de aguas someras en el cual las ecuaciones son resueltas mediante un método de diferencias finitas. En la discretización es utilizado un método de la familia MacCormack, aproximando la batimetría del río y la topografía del lugar mediante el uso de polinomios de alto orden. El efecto de escalonamiento por el uso

de fronteras inmersas se evita por el uso de una interpolación de segundo orden.

Este modelo fue aplicado en la simulación de la bifurcación del río Mezcalapa. Los resultados numéricos muestran una buena aproximación a los experimentales y las diferencias se deben a la no inclusión de las islas, las cuales muestran que tienen un efecto importante en la distribución de gastos en ambas ramas de la bifurcación.

Dada la simplicidad del modelo, el mismo muestra ser una herramienta útil en el estudio de flujos complejos en ríos.

AGRADECIMIENTOS

Las simulaciones fueron realizadas en el cluster Tonatiuh del Instituto de Ingeniería, UNAM. Los autores agradecen a su administrador Ing. Fernando Maldonado al igual que a su equipo ASUL.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cao Z. & Pender G. 2004. Numerical modeling of alluvial rivers subject to interactive sediment mining and feeding, *Advances in water resources* 27:533-546

Chanson H. 2004. *The hydraulics of open channel flow: an introduction*, Editor Butterworth-Heinemann, 585p.

De la Lama M. 2010. Estudio numérico de cuerpos complejos inmersos en un flujo compresible, Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, UNAM, México. 79p.

Fletcher C. A. J. 1988. *Computational techniques for fluid dynamics 2*. Springer, 484 p.

Gottlieb D. & Turkel E. 1976. Dissipative to four methods for time dependent problems. *Mathematics of Computation*. 30:703-723

Guinot V. 2003. Riemann solvers and boundary conditions for two-dimension shallow water simulations, *Int. J. Numer. Fluids* 41: 1191-1219

Hervout J.M. 2007. *Hydrodynamics of free surface flows*, John Wiley & Sons, LTD, West Sussex UK, 341p.

Jimenez A.A, Gracia J. Berezowsky M. & Martinez J. 2007. Estudio de la bifurcación de un río con modelación numérica, *Series del Instituto de Ingeniería, UNAM*, CI-29.

Kennedy, C.A. and Carpenter, M.H. 1997. Comparison of several numerical methods for simulation of compressible shear layers. *NASA Technical Paper*, 3484.

Laney C., 1998. *Computational Gasdynamics*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 613p.

Liang D., Lin B. & Falconer A. 2007, Simulation of rapidly varying flow using an efficient TVD-MacCormack scheme, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 53: 811-826

Sánchez J.A, Vicente W., Salinas-Vázquez M., Os-naya J. y Gracia J. 2009. Numerical simulation of flow in the bifurcation of the Mezcalapa river, *International Workshop on Environmental Hydraulics*, Valencia, España.

Toro E.F. 2001. *Shock-Capturing methods for free surface shallow flows*, John Wiley & Sons, LTD, West Sussex UK, 309p.

Van Rijn L.C. 1993, *Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas*, Aqua publications, Amsterdam, The Netherlands. 690p.

Wu W. 2007. *Computational river dynamics*, Taylor & Francis, London UK. 494p.