



Organización  
de las Naciones Unidas  
para la Educación,  
la Ciencia y la Cultura



Programa  
Hidrológico  
Intergubernamental

## Análisis de Frecuencias de Crecientes No Estacionario con una y dos Covariables

*Non-stationary Flood Frequency Analysis with one and two Covariates*

Aqua-LAC

Revista del Programa Hidrológico Intergubernamental  
para América Latina y el Caribe

Daniel Francisco Campos Aranda <sup>1\*</sup>

Recibido: 27/04/2020

Aceptado: 26/08/2020

\*Autor de correspondencia

### Resumen

Muchos registros de gasto máximo anual (crecientes) muestran una tendencia ascendente originada por la urbanización ocurrida en su cuenca. En otros la tendencia es descendente y se produce por la construcción de embalses en la cuenca. En ambos casos, los efectos del cambio climático pueden exacerbar tales tendencias. El análisis de frecuencias de crecientes permite estimar las Crecientes de Diseño, asociadas a bajas probabilidades de excedencia. Esta técnica, en registros que no son estacionarios, se puede realizar con base en varias funciones de distribución de probabilidades (FDP) variando linealmente su parámetro de ubicación ( $u$ ) con una o dos covariables y entonces, sus cuatro y cinco parámetros de ajuste se pueden obtener por medio de la generalización del método de los momentos L. En este estudio se aplican las FDP: General de Valores Extremos, Logística Generalizada y Pareto Generalizada, a un registro de crecientes sin tendencia pero no estacionario, usando como covariable un índice climático global y a otro registro de crecientes con tendencia ascendente, empleando como covariables el tiempo y dos índices de la cuenca, uno relacionado con las lluvias máximas anuales y otro con la extensión del área urbana. Las conclusiones destacan la sencillez y utilidad del método expuesto.

**Palabras clave:** momentos L, distribuciones GVE, LOG y PAG no estacionarias, error estándar de ajuste, Oscilación Interdecadal del Pacífico, Predicción de PMD, extensión del área urbana.

### Abstract

Many records of maximum annual flows (floods) show an upward trend caused by the urbanization developing on its watershed, whereas for other records the trend is downwards due to the construction of reservoirs in the watershed. In both cases, the effects of climate change can exacerbate such trends. Flood frequency analysis allows the estimation of Design Floods, associated with low probabilities of exceedance. This technique, in non-stationary records, can be performed based on several probability distribution functions (PDF); varying linearly its location parameter ( $u$ ), with one or two covariates, its four and five fit parameters can be obtained by means of the generalization of the L moments method. In this study, the PDFs: General of Extreme Values, Generalized Logistics and Generalized Pareto, are applied to a record of floods without trend but not stationary, using as covariate a global climate index. The same PDFs are used on another record of floods with upward trend, using as covariates the time and two indices of the watershed, one related to the annual maximum rains and the other with the extension of the urban area. The conclusions highlight the simplicity and usefulness of the exposed method.

**Keywords:** L moments, non-stationary GEV, GLO and GPA distributions, standard error of fit, Pacific Interdecadal Oscillation, Prediction of MDP, urban area extension.

<sup>1</sup> Profesor Jubilado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México. campos\_aranda@hotmail.com

## 1. INTRODUCCIÓN

Las obras hidráulicas pueden ser de aprovechamiento como embalses y presas derivadoras, o bien de control para brindar protección a otra infraestructura o a la sociedad, como diques de protección, presas rompe-picos, encauzamientos, rectificaciones, puentes y drenaje pluvial urbano. Todas las obras hidráulicas requieren en sus etapas de planeación, diseño y operación de la estimación, lo más exacta posible, de sus *Crecientes de Diseño*. Con base en estas estimaciones hidrológicas, se dimensionan hidrológicamente las obras hidráulicas y se garantiza su seguridad, también hidrológica; por ello, las crecientes de diseño son *predicciones* o gastos máximos asociados a bajas probabilidades de excedencia, que se obtienen a través del *Análisis de Frecuencias de Crecientes* (AFC). Además, las obras hidráulicas se deben revisar, cuando ocurre alguna de estas dos condiciones: (1) se dispone de más información hidrométrica o hidrológica; o bien, (2) han ocurrido cambios en su cuenca, sean estos de uso del suelo, de construcción de otras obras hidráulicas o los originados por el cambio climático (Jakob, 2013).

El AFC es una técnica estadística de inferencia, que utiliza un modelo probabilístico o *función de distribución de probabilidades* (FDP), para representar a la muestra disponible de gastos máximos anuales en el sitio del proyecto. El AFC está basado en la suposición de *estacionariedad*, es decir, de un clima que no cambia con el tiempo en el sentido estadístico y por ello, se acepta que los registros disponibles de gasto máximo anual sean independientes y estén idénticamente distribuidos, condición denominada “iid” (Rao & Hamed, 2000; Meylan *et al.*, 2012). Sin embargo, en años recientes se ha venido comprobando el cambio climático global, el cual ha generado una intensificación del ciclo hidrológico, con incrementos en la frecuencia y magnitud de los eventos extremos de precipitación y por consecuencia, en la posibilidad de crecientes más severas (Katz, 2013; Kim *et al.*, 2015; Álvarez-Olguín & Escalante-Sandoval, 2016).

La extensión de la teoría estadística de valores extremos al caso de registros hidrológicos no estacionarios ha seguido varios enfoques descritos por Khaliq *et al.* (2006). Uno de ellos, quizás el más simple, aplica la FDP clásica de esta teoría, la distribución General de Valores Extremos (GVE) con tres parámetros ( $u$ ,  $a$ ,  $k$ ), permitiendo un ajuste o traslado gradual al introducir el tiempo  $t$  como una

covariable en su parámetro de ubicación  $u$ , conservando constantes el de escala  $a$  y el de forma  $k$  (Park *et al.*, 2011; Katz, 2013).

Varios autores, han establecido una nomenclatura para estas FDP no estacionarias, por ejemplo El Adlouni *et al.* (2007) y Aissaoui-Fqayeh *et al.* (2009) definieron la distribución GVE estacionaria como  $GVE_0$ , la que tiene su parámetro de ubicación variable linealmente con el tiempo ( $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t$ ) como  $GVE_1$  y cuando la variación depende de dos covariables ( $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot h$ ) será  $GVE_2$ . En el modelo  $GVE_{11}$  varían linealmente con el tiempo u otra covariable los parámetros de ubicación y de escala.

En los modelos  $GVE_1$  y  $GVE_2$ , en lugar de la covariable  $t$  se ha utilizado algún indicador de la variabilidad climática global, como la oscilación interdecenal del Pacífico (IPO) que representa el comportamiento suavizado de la oscilación decenal del Pacífico (PDO) y es similar a la anomalía más importante del clima global que se manifiesta en el océano Pacífico tropical y se conoce como ENSO (El Niño Southern Oscillation). La PDO (Pacific decadal oscillation) se manifiesta en el norte del océano Pacífico y varía en escalas de tiempo mucho más amplias de 20 a 30 años (Sheffield y Wood, 2011; Teegavarapu, 2012; Franks *et al.*, 2015). En México se han realizado estudios de AFC no estacionario utilizando como covariable el ENSO por López de la Cruz y Francés (2014) y usando la PDO por Álvarez-Olguín y Escalante-Sandoval (2016).

El *objetivo* de este estudio consistió en exponer con detalle la generalización del método de los momentos L para estimar los parámetros de ajuste de las FDP no estacionarias  $GVE_1$  y  $GVE_2$ , que fue propuesto, aplicado y contrastado por El Adlouni & Ouarda (2008). En este trabajo se usan como covariables la IPO, el tiempo  $t$  y dos índices, uno relacionado con el desarrollo urbano en la cuenca y otro con la precipitación máxima diaria anual ocurrida en ella. Además, se amplió tal procedimiento a las FDP Logística Generalizada (LOG) y Pareto Generalizada (PAG), que son modelos de uso amplio en el análisis de frecuencias de datos hidrológicos extremos (Kim *et al.*, 2015; Campos-Aranda, 2019). Se describen dos aplicaciones numéricas con datos procedentes de la literatura especializada y se destaca la sencillez y utilidad del método de los momentos L para el ajuste de las seis FDP no estacionarias expuestas.

## 2. TEORÍA OPERATIVA Y DATOS PROCESADOS

### 2.1. Momentos $L$ poblacionales y de la muestra

Los momentos  $L$  ( $\lambda_r$ ) son un sistema alternativo y reciente que permite estimar los parámetros de ajuste de las FDP, de manera exacta y confiable. Su nombre

proviene de ser combinaciones lineales de los momentos de probabilidad pesada ( $\beta_r$ ) desarrollados por Greenwood *et al.* (1979). Los  $\beta_r$  mejoran sustancialmente las propiedades del muestreo, al no ser influenciados por los valores dispersos (Asquith, 2011). Los momentos  $L$  se definen de la manera siguiente (Hosking & Wallis, 1997):

$$\lambda_1 = \beta_0 \quad (1)$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot \beta_1 - \beta_0 \quad (2)$$

$$\lambda_3 = 6 \cdot \beta_2 - 6 \cdot \beta_1 + \beta_0 \quad (3)$$

$$\lambda_4 = 20 \cdot \beta_3 - 30 \cdot \beta_2 + 12 \cdot \beta_1 - \beta_0 \quad (4)$$

También se establecen los cocientes ( $\tau$ ) de momentos  $L$ , iniciando con  $L-Cv$  que es análogo a este

coeficiente y después los de similitud con los coeficientes de asimetría y de curtosis, que son:

$$\tau_2 = \lambda_2 / \lambda_1 \quad (5)$$

$$\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2 \quad (6)$$

$$\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2 \quad (7)$$

En una muestra de tamaño  $n$ , con sus elementos en orden ascendente ( $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ) los estimadores insesgados de  $\beta_r$  son estimados con la

ecuación siguiente (Stedinger *et al.*, 1993; Hosking & Wallis, 1997):

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=r+1}^n \frac{(j-1)(j-2) \dots (j-r)}{(n-1)(n-2) \dots (n-r)} x_j \quad (8)$$

Los estimadores muestrales de  $\lambda_r$  serán  $l_r$  estando definidos por las ecuaciones 1 a 4 y los de los cocientes de momentos  $L$  serán  $t_2$ ,  $t_3$  y  $t_4$ , según las ecuaciones 5 a 7.

### 2.2. Ajuste con momentos $L$ de las distribuciones GVE<sub>0</sub>, LOG<sub>0</sub> y PAG<sub>0</sub>

Hosking & Wallis (1997) destacaron en su Tabla 5.1, que estas tres FDP, cuando su parámetro de forma es negativo ( $k < 0$ ), tienen sus colas derechas más densas o gruesas que todas las otras FDP comúnmente utilizadas en los AFC; debido a ello han ganado aceptación en los análisis de frecuencia de datos hidrológicos extremos (El Adlouni *et al.* 2008).

Estas tres FDP también coinciden en tener un límite superior cuando  $k > 0$  y en definir funciones de dos parámetros de ajuste conocidas como Gumbel, Logística y Exponencial, cuando  $k = 0$ .

A continuación se citan para las distribuciones GVE, LOG y PAG *estacionarias* su solución inversa  $x(F)$ , con la cual se obtienen las predicciones que se asocian a una cierta probabilidad de no excedencia ( $F$ ) y las ecuaciones del método de momentos  $L$  que permiten estimar sus tres parámetros de ajuste ( $u$ ,  $a$ ,  $k$ ) correspondientes a la ubicación, escala y forma.

Distribución GVE (Hosking & Wallis, 1997): intervalo de  $x$ :  $u + a/k \leq x < \infty$  si  $k < 0$ ;

$-\infty < x < \infty$  si  $k = 0$ ;  $-\infty < x \leq u + a/k$  si  $k > 0$ .

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \{1 - [-\ln(F)]^k\} \quad ; \quad k \neq 0 \quad (9)$$

$$k \cong 7.8590 \cdot c + 2.9554 \cdot c^2 \quad (10)$$

siendo

$$c = \frac{2}{3 + t_3} - 0.63093 \quad (11)$$

$$a = \frac{l_2 \cdot k}{\Gamma(1 + k) \cdot (1 - 2^{-k})} \quad (12)$$

$$u = l_1 - \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1 + k)] \quad (13)$$

Para la evaluación de la función Gamma se utilizó la fórmula de Stirling (Davis, 1972):

$$\Gamma(\varepsilon) \cong e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\varepsilon-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot \varepsilon} + \frac{1}{288 \cdot \varepsilon^2} - \frac{139}{51840 \cdot \varepsilon^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \varepsilon^4} + \dots\right) \quad (14)$$

Distribución LOG (Hosking & Wallis, 1997):  
intervalo de  $x$ , idéntico al de la GVE.

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \left\{1 - \left[\frac{(1-F)}{F}\right]^k\right\} \quad ; \quad k \neq 0 \quad (15)$$

$$k = -t_3 \quad (16)$$

$$a = \frac{l_2 \cdot \text{sen}(\pi \cdot k)}{\pi \cdot k} \quad (17)$$

$$u = l_1 - a \left[ \frac{1}{k} - \frac{\pi}{\text{sen}(\pi \cdot k)} \right] \quad (18)$$

Distribución PAG (Hosking & Wallis, 1997):  $u \leq x \leq u + a/k$  si  $k > 0$ .  
intervalo de  $x$ :  $u \leq x < \infty$  si  $k \leq 0$ ;

$$x(F) = u + \frac{a}{k} [1 - (1 - F)^k] \quad ; \quad k \neq 0 \quad (19)$$

$$k = \frac{1 - 3 t_3}{1 + t_3} \quad (20)$$

$$a = l_2(1 + k) \cdot (2 + k) \quad (21)$$

$$u = l_1 - l_2(2 + k) \quad (22)$$

### 2.3. Ajuste con momentos L de las distribuciones GVE<sub>1</sub> y GVE<sub>2</sub>

La generalización del método de momentos L propuesta por El Adlouni & Ouarda (2008) para el

ajuste de la FDP no estacionaria tipo GVE<sub>1</sub>, comienza en la expresión del valor esperado de  $X$  y en ella hacer variar el parámetro de ubicación con la covariable  $t$ :

$$E[X] = u_t + \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1 + k)] = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1 + k)] \quad (23)$$

De esta ecuación se deduce que un estimador  $\hat{\delta}_2$  de  $\delta_2$  se puede obtener mediante una regresión lineal

simple entre la variable  $X$  y la covariable  $t$ . Después se define una nueva variable  $S_1$  con la expresión:

$$S_1 = X - \delta_2 \cdot t \quad (24)$$

Se deduce de la ecuación 23, que la nueva variable  $S_1$  se distribuye según una FDP tipo GVE<sub>0</sub> con parámetros  $\delta_1$ ,  $a$  y  $k$  que se estiman con las ecuaciones 10 a 13 del método de momentos L, destacando que  $u$  (ecuación 13) es igual a  $\delta_1$ , con lo cual quedan estimados los cuatro parámetros de ajuste del modelo GVE<sub>1</sub>. La ecuación 24 corresponde a uno de los primeros enfoques simples sugeridos para procesar registros hidrológicos con tendencia, consistente en retirar primero tal componente determinística (McCuen & Thomas, 1990; Campos-Aranda, 2012). Como han indicado Mudersbach & Jensen (2010), tal enfoque es práctico pero los

resultados de su AFC son válidos sólo en el presente y las obras hidráulicas deben ser seguras al término de su vida útil, requiriéndose que la creciente de diseño sea estimada en una fecha futura predeterminada.

El mismo enfoque se utiliza para introducir una dependencia de dos covariables ( $t$ ,  $h$ ) en el parámetro de ubicación  $u$ , por lo cual, las estimaciones  $\hat{\delta}_2$  y  $\hat{\delta}_3$  de  $\delta_2$  y  $\delta_3$  se obtienen mediante una regresión lineal múltiple de la variable  $X$  contra  $t$  y  $h$ . La nueva variable  $S_2$  será:

$$S_2 = X - \delta_2 \cdot t - \delta_3 \cdot h \quad (25)$$

Con las ecuaciones 10 a 13 aplicadas a la muestra de datos corregidos  $S_2$  se definen los parámetros restantes  $k$ ,  $a$  y  $\delta_1$  del modelo GVE<sub>2</sub>. El Adlouni & Ouarda (2008) compararon por simulación numérica tres procedimientos de obtención de los cuatro parámetros de ajuste del modelo GVE<sub>1</sub>: el método de máxima verosimilitud (Coles, 2001; Nadarajah, 2005; Katz, 2013), el de máxima verosimilitud generalizada (Martins & Stedinger, 2000; El Adlouni *et al.*, 2007) y su generalización del de momentos L; concluyen que el último es mejor que el primero, por tener menores sesgo y error medio cuadrático, pero no

supera al segundo, sobre todo en registros con asimetría importante.

### 2.4. Ecuaciones de la regresión lineal

Se considera que las ordenadas ( $y$ ) son los datos anuales hidrológicos  $X_i$  y los tiempos o años  $t_i$  son las abscisas ( $x$ ), en este caso iguales al  $i$ -ésimo valor  $i$ . Para probar si la pendiente ( $\delta_2$ ) de la recta de regresión ajustada por mínimos cuadrados de los residuos, es estadísticamente diferente de cero, se usa una prueba basada en la distribución de Student con estadística  $DS$ , definida por las ecuaciones siguientes (Ostle & Mensing, 1975):

$$X_i = \delta_1 + \delta_2 \cdot t_i \quad (26)$$

$$\delta_1 = \bar{X} - \delta_2 \cdot \bar{t} \quad (27)$$

$$\delta_2 = \frac{\text{Cov}(X, t)}{\text{Var}(t)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \cdot i - \bar{X} \cdot \bar{t}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \bar{t}^2} \quad (28)$$

$$r_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, t)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(t)}} \quad (29)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \quad (30)$$

$$DS = \frac{\delta_2}{\sqrt{S_\delta^2}} \quad (31)$$

siendo

$$S_\delta^2 = \frac{S_E^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (32)$$

$$S_E^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{(n - 2)} \quad (33)$$

En las expresiones anteriores,  $\bar{X}$  y  $\bar{t}$  son las medias aritméticas y  $r_{xy}$  es el coeficiente de correlación lineal que varía de cero a  $\pm 1$ . La pendiente  $\delta_2$  tiene unidades de  $X/\text{año}$  y la ordenada al origen  $b$  de  $X$ . En la ecuación 33,  $\hat{X}_i$  es el valor estimado con la ecuación 26.  $S_E^2$  y  $S_\delta^2$  son las varianzas de los errores y de la pendiente. Si el valor absoluto calculado  $DS$  (ecuación 31) es mayor que el crítico  $DS_c$ , obtenido

para la distribución de Student con  $v = n - 2$  grados de libertad y  $\alpha = 5\%$ , en una prueba de dos colas, la pendiente  $\delta_2$  es significativa, es decir, existe tendencia lineal. Para estimar el valor de  $DS_c$  se utiliza el algoritmo propuesto por Zelen & Severo (1972), con  $Z = 1.95996$  para una confiabilidad  $(1 - \alpha)$  del 95%:

$$DS_c = Z + G1/v + G2/v^2 + G3/v^3 + G4/v^4 \quad (34)$$

donde

$$G1 = (Z^3 + Z)/4$$

$$G2 = (5Z^5 + 16Z^3 + 3Z)/96$$

$$G3 = (3Z^7 + 19Z^5 + 17Z^3 - 15Z)/384$$

$$G4 = (79Z^9 + 776Z^7 + 1482Z^5 - 1920Z^3 - 945Z)/92160$$

## 2.5. Ecuaciones de la regresión lineal múltiple

La relación entre los datos  $S_2 = Y_i$  y las dos covariables  $t_i$  y  $h_i$  es (Prosdocimi *et al.*, 2015):

$$Y = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot h \quad (35)$$

cuyo arreglo matricial de sus *ecuaciones normales* es (Campos-Aranda, 2003):

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n h_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i \cdot h_i \\ \sum_{i=1}^n h_i & \sum_{i=1}^n t_i \cdot h_i & \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i \cdot h_i \end{bmatrix} \quad (36)$$

Con solución:

$$\mathbf{TH} \cdot \underline{\delta} = \mathbf{Y} \quad \therefore \quad \underline{\delta} = \mathbf{TH}^{-1} \cdot \mathbf{Y} \quad (37)$$

siendo,  $\mathbf{TH}$  una matriz cuadrada con inversa  $\mathbf{TH}^{-1}$ ,  $\underline{\delta}$  un vector columna de incógnitas y  $\mathbf{Y}$  otro vector columna de términos independientes. El coeficiente de determinación  $R^2$  cuantifica el grado de

correlación de la regresión lineal múltiple, su numerador mide la mejora o reducción del error debido a la regresión y su denominador es la dispersión de la variable dependiente, es decir:

$$R^2 = \frac{Dy^2 - De^2}{Dy^2} \quad (38)$$

$$Dy^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (39)$$

$$De^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \delta_1 - \delta_2 \cdot t_i - \delta_3 \cdot h_i)^2 \quad (40)$$

Como  $De^2$  siempre es menor que  $Dy^2$ , entonces  $R^2$  varía de cero a la unidad (cuando  $De^2 = 0$ ) y su raíz cuadrada corresponde al coeficiente de correlación lineal múltiple.

## 2.6. Ajuste con momentos L de las distribuciones LOG<sub>1</sub>, LOG<sub>2</sub>, PAG<sub>1</sub> y PAG<sub>2</sub>

Las distribuciones LOG y PAG son dos modelos probabilísticos utilizados regularmente en los análisis

de frecuencias de datos hidrológicos extremos y que resultan aplicables en sus versiones no estacionarias con parámetro de ubicación variable ( $u_t$ ) por medio de la generalización del método de los momentos L, como se ha expuesto a partir de la ecuación 23. Esta ecuación clave del método tiene las expresiones siguientes en las distribuciones LOG y PAG (Rao & Hamed, 2000):

$$E[X] = u + \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1+k) \cdot \Gamma(1-k)] \quad (41)$$

$$E[X] = u + \frac{\alpha}{1+k} \quad (42)$$

## 2.7. Error estándar de ajuste

A mediados de la década de los años setenta se estableció al error estándar de ajuste (EEA) como un indicador estadístico cuantitativo, ya que evalúa la

desviación estándar de las diferencias entre los valores observados y los estimados con la FDP que se prueba; en este estudio los modelos: GVE<sub>1</sub>, GVE<sub>2</sub>, LOG<sub>1</sub>, LOG<sub>2</sub>, PAG<sub>1</sub> y PAG<sub>2</sub>. Su expresión es la siguiente (Kite, 1977):

$$EEA = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{n - np}} \quad (43)$$

en la cual,  $n$  y  $np$  son el número de datos de la muestra y de parámetros de ajuste, en este caso cuatro y cinco;  $X_i$  son los datos ordenados de menor a mayor y  $\hat{X}_i$  son los valores estimados con la solución

inversa  $x(F)$  o función de cuantiles que utiliza el parámetro de ubicación variable, para una probabilidad de no excedencia estimada con la fórmula de Weibull (Benson, 1962):

$$P(X < x) = \frac{m}{n + 1} \quad (44)$$

donde,

$m$  es el número de orden del dato, con 1 para el menor y  $n$  para el mayor.

## 2.8. Planteamiento general para los análisis probabilísticos

Ya sea que se utilice una o dos covariables, se estiman los cuatro o cinco parámetros de ajuste de las FDP no estacionarias y se cuantifica su  $EEA$  con la ecuación 43, para seleccionar la que conduce al menor valor de tal indicador. En este proceso, cuando los  $EEA$  son similares, se puede adoptar la FDP con base en juicios de seguridad hidrológica, es decir, la que reporta las predicciones más desfavorables o críticas, como se mostrará en las aplicaciones numéricas. Con base en las soluciones inversas (ecuaciones 9, 15 y 19) de las distribuciones GVE, LOG y PAG se calculan predicciones con periodos de retorno ( $Tr$ ) de 2, 25, 50 y 100 años, a través del periodo de registro, aplicando variable el parámetro de ubicación  $u$ , con una o dos covariables. La primera predicción es la mediana, ya que su probabilidad de no excedencia ( $F$ ) es del 50% y las tres siguientes se calculan para probabilidades complementarias, para definir su valor superior e inferior (Park *et al.*, 2011), es decir, para los valores siguientes:  $F = 0.96$  y  $F = 0.04$  para el  $Tr$  de 25 años;  $F = 0.98$  y  $F = 0.02$  para el  $Tr$  de 50 años y  $F = 0.99$  y  $F = 0.01$  para el  $Tr$  de 100 años. Las predicciones a futuro son posibles utilizando los valores pronosticados de cada covariable utilizada (Franks *et al.* 2015).

## 2.9. Registros de crecientes por procesar

Dos registros de la literatura especializada se seleccionaron para ilustrar la aplicación de las FDP no estacionarias GVE, LOG y PAG con el método de generalización de los momentos L (El Adlouni & Ouarda, 2008); sus valores se exponen en la tabla 1.

Estos registros tienen datos aproximados leídos en las gráficas donde fueron expuestos.

### 2.10. Crecientes en un Río de Australia

Franks *et al.* (2015) exponen un registro característico de un río del norte de Nueva Gales del Sur en Australia, cuyos datos abarcan 79 años en el periodo de 1920 a 1998. Tal registro se expone en la figura 1, se observa que el lapso de 1945 a 1973 hubo un incremento en la magnitud de las crecientes anuales, el cual corresponde al descenso y valores negativos de la oscilación interdecenal del Pacífico (IPO), mostrada en la figura 2.

### 2.11. Crecientes en una cuenca urbanizada en Inglaterra

Prosdocimi *et al.* (2014) consideran que usar  $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t$  en una FDP, es un modelo no estacionario demasiado simple para representar el proceso de generación de los gastos máximos anuales, ya que algunos registros muestran mayor variabilidad en ciertos años, indicando con ello alguna influencia de factores climáticos. Por lo anterior, introducen como una covariable a la precipitación máxima diaria de periodo de retorno 100 años anual ( $PMD_{100}$ ) en milímetros, ocurrida en la cuenca analizada. Prosdocimi *et al.* (2015) procesan los registros de gasto máximo anual de dos cuencas vecinas, una rural y otra con influencia de desarrollo urbano en el río Lostock. Esta última, tiene un registro de 33 datos en los años 1974 a 2006 y se sabe que su extensión del área urbana ( $EAU$ ) pasó de un 6.3% en 1970, a los siguientes porcentajes: 10.2%, 11.3%, 12.2% y 16.4% en los años 1980, 1990, 2000 y 2010. En la



tabla 1 se citan los valores anuales de la  $PMD_{100}$  en su cuenca y en la Figura 3 se muestra tal registro de gastos, observando que tiene tendencia ligeramente

ascendente y variabilidad diferente en su primera mitad.

Tabla 1. Gastos máximos anuales ( $Q$ , en  $m^3/s$ ) y sus covariables (IPO,  $PMD_{100}$  y  $EAU$ ) en las dos estaciones hidrométricas procesadas.

No.	Río de Australia				Cuenca urbanizada en U.K.			
	$Q$	IPO	$Q$	IPO	Año	$Q$	$PMD_{100}$	$EAU$
1	289.4	-0.02	520.8	-0.19	1974	25.4	27.7	7.86
2	2314.8	0.03	428.2	-0.20	1975	26.3	25.1	8.25
3	810.2	0.25	2719.9	-0.21	1976	13.2	19.7	8.64
4	347.2	0.47	2546.3	-0.20	1977	19.0	19.4	9.03
5	289.4	0.74	532.4	-0.21	1978	22.7	20.3	9.42
6	925.9	1.10	1388.9	-0.23	1979	22.5	20.3	9.81
7	1157.4	1.21	2777.8	-0.30	1980	35.8	26.1	10.20
8	1134.3	1.33	2893.5	-0.44	1981	28.6	22.7	10.31
9	949.1	1.42	578.7	-0.60	1982	20.9	19.9	10.42
10	532.4	1.47	439.8	-0.83	1983	25.1	31.8	10.53
11	463.0	1.43	289.4	-1.13	1984	17.3	19.8	10.64
12	544.0	1.35	636.6	-1.36	1985	16.4	20.1	10.75
13	578.7	1.24	2025.5	-1.53	1986	41.2	24.9	10.86
14	1678.2	1.16	2800.9	-1.54	1987	20.2	24.9	10.97
15	694.4	1.18	983.8	-1.48	1988	17.5	20.2	11.08
16	486.1	1.25	686.1	-1.27	1989	16.2	18.9	11.19
17	1504.6	1.37	1122.7	-0.62	1990	17.8	17.1	11.30
18	1134.3	1.47	1504.6	-0.12	1991	23.4	20.9	11.39
19	1134.3	1.60	520.8	0.42	1992	23.0	17.8	11.48
20	1273.1	1.66	289.4	0.88	1993	16.2	19.9	11.57
21	173.6	1.68	1562.5	1.08	1994	21.6	23.3	11.66
22	231.5	1.49	1215.3	1.40	1995	21.9	15.9	11.75
23	289.4	1.09	694.4	1.51	1996	20.5	19.2	11.84
24	752.3	0.62	231.5	1.53	1997	23.8	21.8	11.93
25	1388.9	0.17	1794.0	1.47	1998	22.5	22.9	12.02
26	3935.2	-0.40	520.8	1.38	1999	28.1	23.1	12.11
27	1041.7	-0.62	196.8	1.29	2000	30.3	26.3	12.20
28	463.0	-0.96	231.5	1.22	2001	23.3	17.9	12.62
29	1620.4	-1.30	1678.2	1.08	2002	25.9	23.3	13.04
30	2430.6	-1.50	2199.1	1.05	2003	25.5	22.2	13.46
31	4919.0	-1.60	810.2	1.09	2004	26.2	19.1	13.88
32	463.0	-1.60	694.4	1.33	2005	31.0	17.3	14.30

33	1331.0	-1.55	173.6	1.50	2006	33.5	24.9	14.72
34	5613.4	-1.50	173.6	1.61	—	—	—	—
35	1122.7	-1.44	1273.1	1.63	—	—	—	—
36	1851.9	-1.25	520.8	1.55	—	—	—	—
37	405.1	-0.92	2604.2	1.32	—	—	—	—
38	231.5	-0.60	115.7	1.02	—	—	—	—
39	3761.6	-0.36	463.0	-0.02	—	—	—	—
40	810.2	-0.22	—	—	—	—	—	—

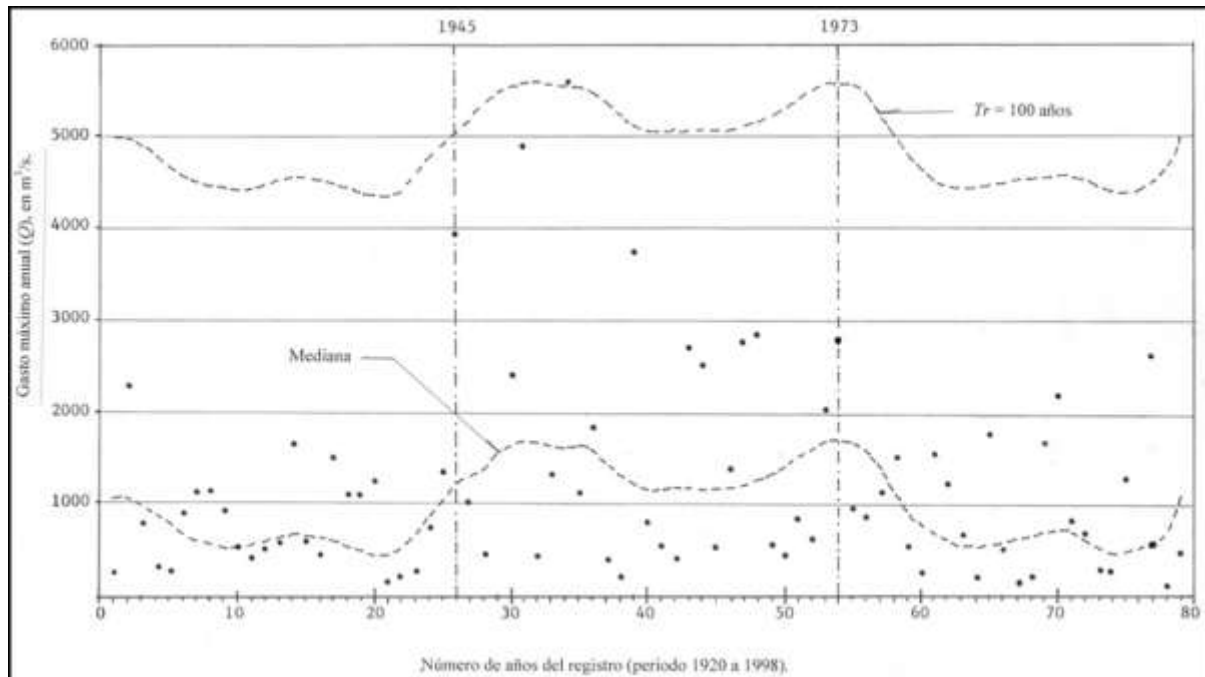


Figura 1. Gastos máximos anuales de un río del norte de Nueva Gales del Sur, Australia y sus predicciones de periodos de retorno 2 años (mediana) y 100 años, obtenidas con la FDP no estacionaria  $GVE_1$ , usando como covariable la IPO.

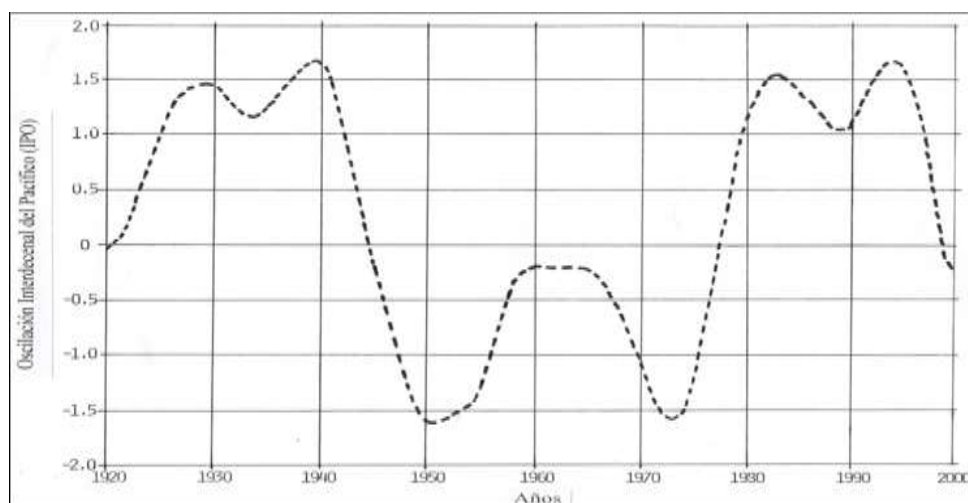


Figura 2. Variación de la Oscilación Interdecadal del Pacífico (IPO) según Franks *et al.* (2015)

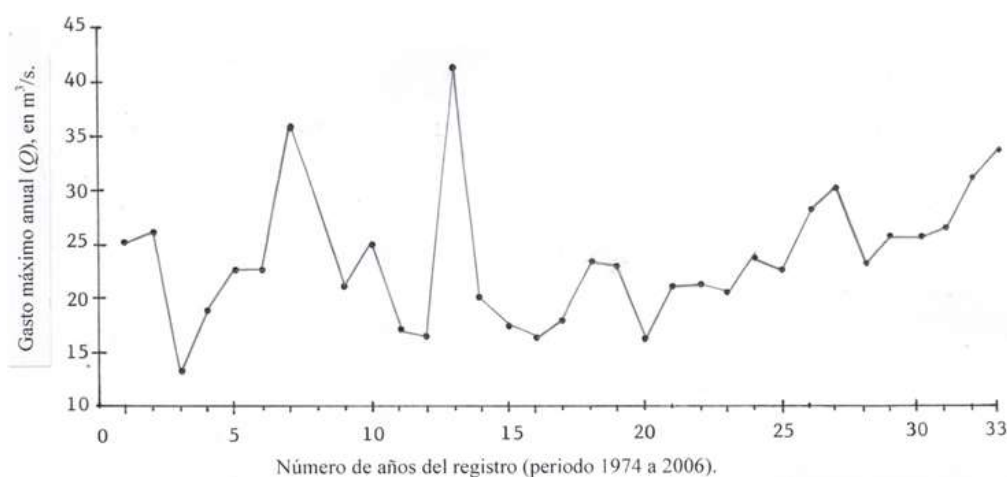


Figura 3. Gastos máximos anuales en una estación hidrométrica del Río Lostock, Inglaterra

### 3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

#### 3.1. Crecientes en un Río de Australia

En esta aplicación numérica se usa como covariable la IPO, con tendencia lineal descendente y significativa, ya que  $DS = -3.6242$  es mayor que  $DSc = 1.9913$ .

En este registro, el error estándar de ajuste ( $EEA$ ) de las FDP no estacionarias  $GVE_1$ ,  $LOG_1$  y  $PAG_1$  resultaron ser 550.9, 566.8 y 549.9  $m^3/s$ .

Aunque el modelo no estacionario  $PAG_1$  tiene el menor  $EEA$ , se adoptan los resultados de la función  $GVE_1$  por conducir a predicciones mayores o más críticas. Sus parámetros de ajuste son:  $\delta_2 = -373.189$ ,  $\delta_1 = 834.518$ ,  $a = 679.619$  y  $k = -0.118$ ; con  $-0.3817$  como coeficiente de correlación lineal. En la Tabla 2 se presenta sólo una parte de las predicciones dentro de registro.

Para tener predicciones a futuro habrá que hacer pronósticos de los valores de la IPO (Franks *et al.* 2015).

En la figura 1 se muestran las dos predicciones extremas completas.

#### 3.2. Crecientes en una cuenca urbanizada de Inglaterra

En las columnas 1 y 2 de la Tabla 3 se citan las tres FDP no estacionarias ajustadas a los datos de esta cuenca y sus respectivas covariables. Se observa que de los modelos tipo  $GVE_1$ , sólo la covariable  $PMD_{100}$  tiene pendiente significativa, indicada en la columna 4 con el signo  $>$ ; por lo anterior, únicamente estos resultados podrán ser comparados contra los del modelo tipo  $GVE_2$  de dos covariables; cuyo mejor modelo es el último, el cual conduce al mayor valor de  $R^2$ .

Para decidir entre ambos modelos, se recurre al menor  $EEA$  y por ello se selecciona la distribución  $GVE_1$  con covariable  $PMD_{100}$ .

Respecto a la FDP Pareto Generalizada ( $PAG$ ), sus  $EEA$  en los modelos seleccionados resultaron mayores.

En cambio, la FDP Logística Generalizada ( $LOG$ ) conduce a  $EEA$  similares a los del modelo  $GVE$  y entonces pueden ser seleccionados sus resultados, al tomar en cuenta que sus predicciones son más críticas o severas. Por lo anterior, se adoptan como predicciones dentro del periodo histórico y con periodos de retorno ( $Tr$ ) de 25, 50 y 100 años, las magnitudes de 43.0, 46.2 y 49.8  $m^3/s$ , obtenidas con el modelo  $LOG_1$  de covariable  $PMD_{100}$ .

Tabla 3. Contraste de parámetros de ajuste y de las predicciones obtenidas con las FDP no estacionarias aplicadas a los datos hidrológicos disponibles en una cuenca urbanizada de Inglaterra.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
FDP	Covariable	$\delta_2$	$DS$	$\delta_3$	$r_{xy}$ o $R^2$	$\delta_1 = u$	$a$	$k$	$EEA$ (m <sup>3</sup> /s)	Mediana		Predicciones máximas (m <sup>3</sup> /s)		
										mín	máx	$Tr = 25$	$Tr = 50$	$Tr = 100$
GVE <sub>1</sub>	$t$	0.1446	1.323 <	–	0.2312	18.722	4.567	–0.015	1.16	20.5	25.2	38.5	41.8	45.2
GVE <sub>1</sub>	$PMD_{100}$	0.8404	3.059 >	–	0.4815	3.147	4.525	0.063	3.45	18.1	31.5	43.0	45.5	47.9
GVE <sub>1</sub>	$EAU$	1.0516	1.631 <	–	0.2811	9.420	4.506	–0.013	1.17	19.3	26.6	39.6	42.9	46.2
GVE <sub>2</sub>	$t, PMD_{100}$	0.2129	–	0.9588	0.3432	–3.109	3.896	0.008	3.55	17.8	30.9	41.8	44.5	47.1
GVE <sub>2</sub>	$t, EAU$	–0.3694	–	3.1851	0.1028	–8.524	4.619	0.019	1.33	17.8	27.9	40.5	43.6	46.5
GVE <sub>2</sub>	$PMD_{100}, EAU$	0.9791	–	1.4744	0.3809	–16.158	3.991	0.063	3.49	17.6	31.9	42.1	44.3	46.4
LOG <sub>1</sub>	$t$	0.1446	1.323 <	–	0.2312	20.331	3.041	–0.180	1.00	20.5	25.1	38.1	42.2	46.8
LOG <sub>1</sub>	$PMD_{100}$	0.8404	3.059 >	–	0.4815	4.888	2.886	–0.130	3.48	18.3	31.6	43.0	46.2	49.8
LOG <sub>1</sub>	$EAU$	1.0516	1.631 <	–	0.2811	10.980	2.997	–0.178	1.05	19.2	26.5	39.3	43.3	47.8
LOG <sub>2</sub>	$t, PMD_{100}$	0.2129	–	0.9588	0.3432	–1.380	2.561	–0.165	3.50	18.1	31.2	41.9	45.2	48.8
LOG <sub>2</sub>	$t, EAU$	–0.3694	–	3.181	0.1028	–6.637	3.019	–0.158	1.34	18.0	28.1	40.5	44.3	48.4
LOG <sub>2</sub>	$PMD_{100}, EAU$	0.9791	–	1.4744	0.3809	–14.623	2.544	–0.130	3.47	17.4	32.0	42.0	44.9	48.0
PAG <sub>1</sub>	$t$	0.1446	1.323 <	–	0.2312	13.591	10.672	0.391	1.67	20.2	24.8	37.9	39.7	41.1
PAG <sub>1</sub>	$PMD_{100}$	0.8404	3.058 >	–	0.4815	–2.016	11.596	0.539	3.53	18.1	31.4	42.4	43.6	44.4
PAG <sub>1</sub>	$EAU$	1.0516	1.631 <	–	0.2811	4.325	10.556	0.395	1.57	19.0	26.2	39.0	40.8	42.2
PAG <sub>2</sub>	$t, PMD_{100}$	0.2129	–	0.9588	0.3432	–7.186	9.354	0.434	3.69	18.3	31.0	41.6	43.0	44.1
PAG <sub>2</sub>	$t, EAU$	–0.3694	–	3.1851	0.1028	–13.552	11.230	0.454	1.35	17.8	27.8	40.1	41.7	42.8
PAG <sub>2</sub>	$PMD_{100}, EAU$	0.9791	–	1.4744	0.3809	–20.713	10.231	0.540	3.60	17.2	31.9	41.6	42.6	43.3

#### 4. CONCLUSIONES

Los análisis de frecuencias de crecientes (AFC) en registros no estacionarios o con tendencia serán, en el futuro inmediato, cada vez más comunes, debido al desarrollo de la sociedad y a los efectos de cambio climático. Un enfoque práctico para realizar el AFC en tales registros, utiliza la generalización del método de los momentos L, para estimar los parámetros de ajuste de los modelos probabilísticos cuyo parámetro de ubicación ( $u$ ) varía con una o dos covariables.

En el desarrollo de las dos aplicaciones numéricas descritas se observa la simplicidad del método

expuesto y la sencillez para obtener las predicciones asociadas a probabilidades de no excedencia. Además, en la segunda aplicación numérica se expone cómo proceder en la búsqueda del mejor modelo probabilístico no estacionario que represente al registro disponible, al usar cada covariable y la combinación de dos de ellas. La selección de tal modelo se basa en el coeficiente de correlación o de determinación y en el error estándar de ajuste. Los AFC expuestos se pueden aplicar a otros datos hidrológicos extremos, como precipitaciones, temperaturas, vientos y niveles del mar.

#### REFERENCIAS

- Aissaoui-Fqayeh, I., El-Adlouni, S., Ouarda, T. B. M. J., & St-Hilaire, S. A. (2009). Développement du modèle log-normal non-stationnaire et comparaison avec le modèle GEV non-stationnaire. *Journal des Sciences Hydrologiques*, 54(6), 1141–1156.
- Álvarez-Olguín, G., y Escalante-Sandoval, C. A. (2016). Análisis de frecuencias no estacionario de series de lluvia anual. *Tecnología y Ciencias de Agua*, 7(1), 71–88.
- Asquith, W. H. (2011). *Distributional Analysis with L-moment Statistics using the R Environment for Statistical Computing*. Chapter 5: Probability-Weighted Moments, 77–86. Author edition. Texas, U.S.A. ISBN-13: 978-1463508418.
- Benson, M. A. (1962). Plotting positions and economics of engineering planning. *Journal of Hydraulics Division*, 88(6), 57–71.
- Campos-Aranda, D. F. (2003). Introducción a los Métodos Numéricos: Software en Basic y aplicaciones en Hidrología Superficial. Capítulo 5: Ajuste de Curvas, 93–127. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P., México. ISBN-970-705-019-5.
- Campos-Aranda, D. F. (2012). Técnicas asociadas al Análisis de Frecuencia de Crecientes en cuencas con desarrollo urbano. *Ingeniería. Investigación y Tecnología*, 13(3), 385–392.
- Campos-Aranda, D. F. (2019). Ajuste con momentos L de las distribuciones no estacionarias  $GVE_1$  y  $GVE_2$  a series de *PMD*. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 10(5), 75–105.
- Coles, S. (2001). *An introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag London Limited. London, England. ISBN 1-85233-459-2.
- Davis, P. J. (1972). Gamma Function and related functions, 253–296. In: Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications. New Work, U.S.A. ISBN 486-61272-4.
- El Adlouni, S., Ouarda, T. B. M. J., Zhang, X., Roy R., & Bobée, B. (2007). Generalized maximum likelihood estimators for the nonstationary generalized extreme value model. *Water Resources Research*, 43(3), 1–13.
- El Adlouni, S., Bobée B., & Ouarda, T. B. M. J. (2008). On the tails of extreme event distributions in hydrology. *Journal of Hydrology*, 355(1–4), 16–33.
- El Adlouni, S., & Ouarda, T. B. M. J. (2008). Comparaison des méthodes d'estimation des paramètres du modèle GEV non stationnaire. *Revue des Sciences de l'Eau*, 21(1), 35–50.
- Franks, S. W., White, C. J., & Gensen, M. (2015). Estimating extreme flood events—assumptions, uncertainty and error, 31–36. *Proceedings of the IAHS*, No. 369: Extreme Hydrological Events.
- Greenwood, J. A., Landwehr, J. M., Matalas, N. C., & Wallis, J. R. (1979). Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resources Research*, 15(5), 1049–1054.
- Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (1997). *Regional Frequency Analysis. An approach based on L-moments*. Cambridge University Press. Cambridge, England. ISBN-100-521-01940-0.

- Jakob, D. (2013). Nonstationarity in Extremes and Engineering Design, 393–417. In: AghaKouchak A, Easterling D., Hsu, K, Schubert S., Sorooshian S. (eds.). *Extremes in a Changing Climate*. Springer. Dordrecht, The Netherlands. ISBN 978–94–007–4478–3.
- Katz, R. W. (2013). Statistical Methods for Nonstationary Extremes, 15–37. In: AghaKouchak A, Easterling D., Hsu, K, Schubert S., Sorooshian S. (eds.). *Extremes in a Changing Climate*. Springer. Dordrecht, The Netherlands. ISBN 978–94–007–4478–3.
- Khaliq, M. N., Ouarda, T. B. M. J., Ondo, J. C., Gachon, P., & Bobée, B. (2006). Frequency analysis of a sequence of dependent and/or non-stationary hydro-meteorological observations: A review. *Journal of Hydrology*, 329(3–4), 534–552.
- Kim, S., Nam, W., Ahn, H., Kim, T., & Heo, J. H. (2015). Comparison of nonstationary generalized logistic models based on Monte Carlo simulation, 65–68. *Proceedings of the IAHS*, No. 371: Hydrologic non-stationarity and extrapolating models to predict the future.
- Kite, G. W. (1977). *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Chapter 12: Comparison of frequency distributions, 156–168. Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, U.S.A. ISBN–0–918334–23–3.
- López de la Cruz, J., y Francés, F. (2014). La variabilidad climática de baja frecuencia en la modelación no estacionaria de los regímenes de las crecidas en las regiones hidrológicas Sinaloa y Presidio–San Pedro. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 5(4), 79–101.
- Martins, E. S., & Stedinger, J. R. (2000). Generalized maximum-likelihood GEV quantile estimators for hydrologic data. *Water Resources Research*, 36(3), 737–744.
- McCuen, R. H., & Thomas, W. O. (1990). Flood frequency analysis techniques for urbanizing watersheds, 35–46. *Symposium Proceedings on Urban Hydrology*. American Water Resources Association. Bethesda, Maryland, U.S.A.
- Meylan, P., Fabre, A. C., & Musy, A. (2012). *Predictive Hydrology. A Frequency Analysis Approach*. Chapter 1: Introduction. 1–13. CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. ISBN: 978–1–57808–747–1.
- Mudersbach, C., & Jensen, J. (2010). An advanced statistical extreme value model for evaluating storm surge heights considering systematic records and sea level scenarios, currents 23. *Proceedings of the 32nd Conference on Coastal Engineering*. Shanghai, China.
- Nadarajah, S. (2005). Extremes of daily rainfall in west central Florida. *Climatic Change*, 69(2–3), 325–342.
- Ostle, B., & Mensing, R. W. (1975). *Statistics in Research*. Chapter 7: Regression Analysis, 165–236. Iowa State University Press. Ames, Iowa, U.S.A. ISBN 0–8138–1570–3.
- Park, J. S., Kang, H. S., Lee, Y. S., & Kim, M. K. (2011). Changes in the extreme daily rainfall in South Korea. *International Journal of Climatology*, 31(15), 2290–2299.
- Prosdocimi, I., Kjeldsen, T. R., & Svensson, C. (2014). Non-stationarity in annual and seasonal series of peak flow and precipitation in the UK. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 14(5), 1125–1144.
- Prosdocimi, I., Kjeldsen, T. R., & Miller, J. D. (2015). Detection and attribution of urbanization effect on flood extremes using nonstationary flood frequency models. *Water Resources Research*, 51(6), 4244–4262.
- Rao, A. R., & Hamed, K. H. (2000). *Flood Frequency Analysis*. Chapter 1: Introduction, 1–21. CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. ISBN 0–412–55280–9.
- Sheffield, J., & Wood, E. F. (2011). *Drought. Past Problems and Future Scenarios*. Chapter 3: The Science of Drought, 17–42. Earthscan LLC. Washington, D.C., U.S.A. ISBN 978–1–84971–082–4.
- Stedinger, J. R., Vogel, R. M., & Foufoula-Georgiou, E. (1993). Frequency Analysis of Extreme Events, 18.1–18.66. In: Maidment D. R. (ed.). *Handbook of Hydrology*. McGraw–Hill, Inc. New York, U.S.A. ISBN 0–07–039732–5.

- Teegavarapu, R. S. V. (2012). Floods in a Changing Climate. Extreme Precipitation. Chapter 6: Precipitation variability and teleconnections, 169–192. International Hydrology Series (UNESCO) and Cambridge University Press. Cambridge, United Kingdom. ISBN 978–1–107–01878–5.
- Zelen, M., & Severo, N. C. (1972). Probability Functions, 925–995. In: Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.). Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications. New Work, U.S.A. ISBN 486–61272–4.

*Como citar este artículo:*

Campos–Aranda, D. F. (2020). Análisis de Frecuencias de Crecientes No Estacionario con una y dos Covariables. *Aqua-LAC* Volumen 12(2), 47-61. doi: 10.29104/phi-aqualac/



Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International  
CC BY-NC-SA 4.0 license